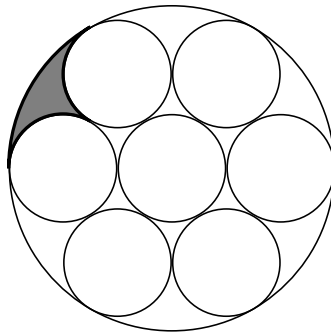


1. Kuviossa ison ympyrän säde on 6, pienet ympyrät ovat samankokoisia ja sisin sekä uloin ympyrä sivuavat muita ympyröitä. Määritä kuvion varjostetun osan ala.



2. Ratkaise Diofantoksen yhtälö

$$x^2 + (10y - y^2)^2 + y^6 = 2011$$

eli etsi ylläolevan yhtälön kokonaislukuratkaisut.

3. Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{x^2 - 2011x + 1}{x^2 + 1}.$$

Osoita, että  $|f(x) - f(y)| \leq 2011$  kaikilla reaaliluvuilla  $x$  ja  $y$ .

4. Taso laatoitetaan valkoisilla ja mustilla yksikköneliöillä niin, että toisiaan kosketavilla laatoilla on joko kokonainen yhteinen sivu tai vain yhteinen kärki. Tasoon piirretyn janan sanotaan olevan valkoinen, jos on olemassa sellaiset valkoiset laatat, että jana pysyy näiden sisäpuolella lukuun ottamatta kohtia, joissa se leikkaa sivuja; vastaavasti määritellään musta jana. Osoita, että taso voidaan laatoittaa niin, ettei minkään valkoisen tai mustan janan pituus ole suurempi kuin 5.

Työaika on **120 minuuttia**.

Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.

Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).