Lukion matematiikkakilpailun alkukilpailun avoin sarja

31. 10. 2016

1. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku k, jolle luku $10!/k$ on neliöluku eli jonkin kokonaisluvun m toinen potenssi. Määritä tämä kokonaisluku m. (Positiivisen kokonaisluvun n *kertoma* $n!$ on tulo $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.)

2. Ympyrän halkaisijan AB toisen päätepisteen A kautta piirretään ympyrälle tangentti ja pisteen B kautta jänne BC, jonka jatke leikkaa tangentin pisteessä D. Osoita, että C:n kautta piirretty ympyrän tangentti puolittaa janan AD.

3. Määritä kaikki funktiot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka toteuttavat epäyhtälön

$$\frac{f(xy) + f(xz)}{2} - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4},$$

kun $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4. Aino ja Väino pelaavat peliä $\mathrm{SYT}(m,n)$, missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Pelin alkaessa pöydällä on kaksi kivikasaa, joista toisessa on m, toisessa n kiveä. Vuorossa oleva pelaaja saa poistaa jommastakummasta kasasta minkä tahansa kivimäärän, joka on toisen kasan kivien lukumäärän positiivinen monikerta. Pelaajat poistavat kiviä vuorotellen niin, että Aino aloittaa. Se, joka pystyy tyhjentämään toisen kasoista, voittaa. Todista, että on olemassa sellainen $\alpha > 1$, että aina kun $m, n \in \mathbb{N}$ ja $m \geq \alpha n > 0$, niin Ainolla on voittostrategia pelissä $\mathrm{SYT}(m,n)$.

Työaikaa on **120 minuuttia.**
Laskimet eivät ole sallittuja.
Tee kukin tehtävä omalle konseptiarkin sivulleen.
Merkitse koepaperiin selvästi tekstaten oma nimesi ja
yhteystietosi (koulun nimi, kotiosoite ja sähköpostiosoite).