

# Lukion matematiikkakilpailu

## Loppukilpailu 6. helmikuuta 2004

### Yleiset ohjeet:

- Työaika 3 tuntia
- Laskimien ja taulukoiden käyttö ei ole sallittua.
- Eri tehtävien vastaukset eri papereille!
- Jokaiseen vastauspaperiin oma nimi!
- Vain vastaukset, jotka käsialan puolesta ovat luettavissa, arvostellaan.

### 1. Yhtälöillä

$$x^2 + ax + b^2 \quad \text{ja} \quad x^2 + 2bx + c^2 = 0$$

on kummallakin kaksi erisuurta reaalista ratkaisua. Kuinka monta reaalista ratkaisua on yhtälöllä

$$x^2 + 2cx + a^2 = 0?$$

### 2. Luvut $a, b$ ja $c$ ovat positiivisia kokonaislukuja ja

$$\frac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c}$$

on rationaaliluku. Osoita, että

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$$

on kokonaisluku.

**3.** Ympyrät, joiden säteet ovat  $r$  ja  $R$ , sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Kuinka pitkän janan ympyröiden sivuamispisteen kautta kulkevasta ympyröiden yhteisestä tangentista erottavat ympyröiden kaksi muuta tangenttia?

**4.** Luvut  $2005! + 2, 2005! + 3, \dots, 2005! + 2005$  muodostavat 2004:n peräkkäisen kokonaisluvun jonon, jossa ei ole yhtään alkulukua. Onko olemassa jokin 2004:n peräkkäisen kokonaisluvun jono, jossa on tasan 12 alkulukua?

**5.** Valtakunnassa otetaan käyttöön uusi rahayksikkö, markka, joka jakautuu sataan penniin. Eri kolikkoarvoja otetaan käyttöön vain kolme. Mitkä kolikkoarvot olisi valittava, jotta mikä tahansa markkaa pienempi ostos voitaisiin maksaa tasarahalla kukkarosta, jossa on mahdollisimman vähän kolikkoja?