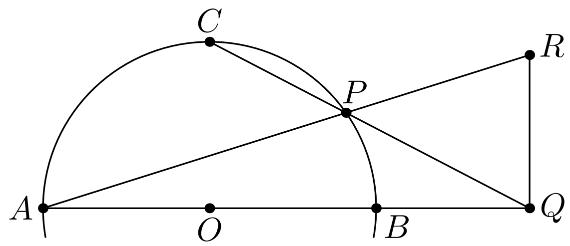
Vuoden 1995 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Olkoon AB O-keskisen ympyrän halkaisija. Valitaan ympyrän kehältä piste C siten, että OC ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Olkoon P mielivaltainen (lyhemmän) kaaren BC piste ja leikatkoot suorat CP ja AB pisteessä Q. Valitaan R AP:ltä niin, että RQ ja AB ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Osoita, että $|BQ| = |QR|$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on huomata jännenelikulmio $BPRQ$.



Huomataan, että $BPRQ$ on jännenelikulmio: kulma $\angle RQB$ on suora ja $\angle BPR = \angle APB$ on Thaleen lauseen nojalla suora. Täten

$$\angle QBR = \angle QPR = \angle CPA = 45°,$$

koska ACB on tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Täten myös QBR on tasakylkinen suorakulmainen kolmio.

Kommentti. Tehtävän voi ratkaista myös analyyttisellä geometrialla asettamalla pisteet koordinaatistoon (esimerkiksi niin, että O on origossa ja $B = (1, 0)$). Tätä kautta voidaan laskea, että BQ ja QR ovat yhtä pitkiä.

2. Viestit koodataan käyttäen vain nollista ja ykkösistä koostuvia jonoja. Vain sellaisia jonoja, joissa esiintyy enintään kaksi peräkkäistä ykköstä tai nollaa saa käyttää. (Esimerkiksi jono 011001 on sallittu, mutta 011101 ei ole.) Määritä kaikkien tasan 12 merkistä koostuvien jonojen lukumäärä.

Vastaus. Sallittuja jonoja on 466 kappaletta.

Ratkaisu. Ideana on laskea jonojen lukumäärää rekursiivisesti.

Olkoon $f(n)$ sallittujen n-merkkisten jonojen määrä. Jaetaan sallitut jonot kahteen joukkoon: niihin, joiden viimeiset kaksi merkkiä ovat eri ja niihin, joiden viimeiset kaksi merkkiä ovat samat. Olkoon ensin mainittuja $g(n)$ kappaletta ja jälkimmäisiä $h(n)$ kappaletta. Tällöin $f(n) = g(n) + h(n)$.

Huomataan, että

$$g(n+1) = g(n) + h(n)$$

ja

$$h(n+1) = g(n).$$

Ensimmäinen yhtälö seuraa siitä, että $n+1$-merkkisen kahteen eri merkkiin päättyvät jonot saadaan tutkimalla n-merkkisiä jonoja ja laittamalla niiden perään merkin, joka on eri kuin niiden viimeinen merkki. Toinen yhtälö seuraa vastaavalla päättelyllä.

Yhtälöistä saadaan

$$g(n+1) = g(n) + g(n-1).$$

Lisäksi $g(1) = g(2) = 2$. Rekursioyhtälöiden ja alkuarvojen avulla saadaan laskettua g:n arvot $g(1), g(2), g(3), \ldots, g(12)$

$$2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288.$$

Nyt $f(12) = g(12) + h(12) = 288 + 178 = 466$.

Kommentti. Luvut $f(n)$ ja $g(n)$ vastaavat Fibonaccin lukuja kerrottuna kahdella (sopivasta kohdasta aloitettuna). Tehtävän voi ratkaista muillakin tavoilla käyttämällä rekursioyhtälöitä.

Toisenlainen ratkaisu: Tutkitaan luvun 12 esittämistä ykkösten ja kakkosten summana. Esimerkiksi $12 = 1+2+1+2+2+1+1+2$. Jokaista tällaista summaa vastaa tasan kaksi sallittua jonoa. Yllä esimerkin tapauksessa nämä ovat 011011001011 ja 100100110100. Summia, joissa on 12 ykköstä on 1, summia, joissa on 10 ykköstä ja yksi kakkonen on $\binom{11}{1}$, ja niin edelleen. Sallittuja jonoja on siten

$$2 \cdot \left(1 + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{9}{3} + \binom{8}{4} + \binom{7}{5} + \binom{6}{6}\right) = 466.$$

3. Olkoon $n \geq 2$ ja olkoot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalilukuja, joille on voimassa $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq 0$ ja $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Olkoon $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Osoita, että

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{1}$$

Selvitä, milloin (1):ssä vallitsee yhtäsuuruus.

Vastaus. Yhtäsuuruus pätee silloin ja vain silloin, kun $n-1$ luvuista ovat $1/\sqrt{n(n-1)}$ ja yksi luvuista on $-(n-1)/\sqrt{n(n-1)}$ tai jos $n = 2$ ja molemmat luvuista ovat $1/\sqrt{2}$.

Ratkaisu. Ratkaisussa tutkitaan erikseen negatiivisia ja epänegatiivisia lukuja x_i. Ratkaisun idea on seuraava: Jos kaikki epänegatiiviset luvut x_i ovat pieniä (enintään M), niin negatiivisten lukujen itseisarvojen tulee olla myös pieniä, jotta $x_1 + \ldots + x_n \geq 0$. Täten myös negatiivisten lukujen neliöiden summa on pieni. Toisaalta lukujen neliöiden summan tulee olla 1, joten negatiivisten lukujen neliöiden summa on kohtalaisen iso. Tästä saadaan, ettei M ole kovin suuri.

Itse ratkaisuun. Olkoon N niiden i joukko, joilla $x_i < 0$ ja P niiden i joukko, joilla $x_i \geq 0$. Jos kaikki luvut ovat epänegatiivisia, niin pätee

$$nM^2 \geq x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

ja siten $M \geq 1/\sqrt{n}$, mistä väite seuraa. (Yhtäsuuruus vaatii $n = 2$, $x_1 = x_2 = 1/\sqrt{2}$.)

Oletetaan sitten, että vähintään yksi luku on negatiivinen. Nyt epänegatiivisten lukujen summa on enintään $(n-1)M$ ja neliöiden summa $\sum_{i \in P} x_i^2$ on enintään $(n-1)M^2$. Negatiivisten lukujen (itseisarvojen) summalle pätee siten

$$\sum_{i \in N} |x_i| \leq (n-1)M$$

ja neliöiden summalle

$$\sum_{i\in N} x_i^2 \geq 1-(n-1)M^2.$$

Toisaalta neliöiden summalle pätee myös arvio

$$\sum_{i\in N} x_i^2 \leq \left(\sum_{i\in N}|x_i|\right)^2 \leq (n-1)^2M^2.$$

Tästä saadaan M:lle epäyhtälö

$$(n-1)^2M^2 \geq 1-(n-1)M^2,$$

mistä ratkaistaan

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Yhtäsuuruus vaatii, että epänegatiivisten lukujen summa on tasan $(n-1)M$, eli että epänegatiivisia lukuja on $n-1$ ja kaikki ovat yhtä suuria kuin M. Viimeinen luku on tällöin $-(n-1)M$. Tästä päästään alun vastaukseen.

4. Osoita, että on olemassa äärettömän monta keskenään epäyhtenevää kolmiota T, joille pätee

(i) Kolmion T sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja.

(ii) T:n pinta-ala on kokonaisluku.

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu Heronin kaavaan ja Pellin yhtälöön.

Haluamme siis löytää äärettömän monta positiivista kokonaislukua n, jolla kolmion, jonka sivun pituudet ovat $n-1, n, n+1$, pinta-ala on kokonaisluku. *Heronin kaava* kertoo kolmion pinta-alan kun sivujen pituudet tiedetään. Merkitään kolmion piirin puolikasta $p = \frac{3n}{2}$. Pinta-ala on nyt

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p(p-(n-1))(p-n)(p-(n+1))} \\ &= \sqrt{\frac{3n}{2}\left(\frac{3n}{2}-(n-1)\right)\left(\frac{3n}{2}-n\right)\left(\frac{3n}{2}-(n+1)\right)} \\ &= \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2-4)}. \end{aligned}$$

Yritetään siis löytää äärettömän monta parillista kokonaislukua $n = 2k$, jolla

$$\frac{3}{4}(n^2-4) = 3(k^2-1)$$

on kokonaisluvun neliö. Kirjoitetaan $x^2 = 3(k^2-1)$. Luvun x tulee olla kolmella jaollinen, joten kirjoitetaan $x = 3y$. Yhtälö sievenee muotoon

$$k^2 - 3y^2 = 1. \tag{2}$$

Tämä on *Pellin yhtälö*, jolle tunnetusti löytyy äärettömästi ratkaisuja. Tämä antaa äärettömän monta kelpaavaa lukua n.