Vuoden 1996 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Todista, että on olemassa 1996:lla jaollinen kokonaisluku, jonka kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden summa on 1996.

Ratkaisu. Esitetään kaksi erilaista ratkaisua.

1. ratkaisu. Idea on kirjoittaa peräkkäin sopiva määrä lukuja 1996 ja $1996 \cdot 2 = 3992$ halutun luvun muodostamiseksi.

Luvun 1996 numeroiden summa on 25 ja luvun $2 \cdot 1996 = 3992$ numeroiden summa on 23. Luvun 1996 voi kirjoittaa muodossa $25x + 23y$: pätee $1996 = 78 \cdot 25 + 2 \cdot 23$. Täten luku

$$\underbrace{1996\ldots1996}_{78\text{ kpl}}39923992$$

kelpaa: sen numeroiden summa on 1996 ja selvästi luku on jaollinen 1996:lla.

2. ratkaisu. Idea on muodostaa luku, jossa on ykkösiä sopivilla määrillä nollia eroteltuina.

Koska $1996 = 4 \cdot 499$, riittää löytää luku, joka päättyy kahteen nollaan, on jaollinen luvulla 499 ja jonka numeroiden summa on 1996. Voidaan tarkistaa, että 499 on alkuluku. Täten Fermat'n pienen lauseen nojalla

$$10^{498} \equiv 1 \pmod{499}.$$

Siten

$$N = 10^{498} + 10^{498 \cdot 2} + \ldots + 10^{498 \cdot 1996}$$

on jaollinen luvulla 499. Selvästi N on jaollinen myös neljällä. Täten N kelpaa halutuksi luvuksi.

(Luku N koostuu ykkösistä, joiden välillä on aina 498 nollaa.)

2. Määritä kaikkia reaaliluvut x, joille

$$x^n + x^{-n}$$

on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla n.

Vastaus. Ehdon toteuttavat luvut ovat

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1},$$

kun $m \neq -1, 0, 1$ on kokonaisluku.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on, että jos $x + x^{-1}$ on kokonaisluku, niin $x^n + x^{-n}$ on kokonaisluku kaikilla kokonaisluvuilla n.

Selvästi $x^0 + x^{-0}$ on kokonaisluku, joten riittää tutkia tapausta $n \neq 0$. Symmetrian nojalla voidaan olettaa $n \geq 1$.

Väite. Jos $x + x^{-1}$ on kokonaisluku, niin $x^n + x^{-n}$ on kokonaisluku kaikilla $n \geq 2$.

Väiteen todistus. Tapauksessa $n = 2$ huomataan, että

$$x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2.$$

Yleisesti huomataan

$$x^n + x^{-n} = (x + x^{-1})(x^{n-1} + x^{-(n-1)}) - (x^{n-2} + x^{-(n-2)}),$$

mistä väite seuraa induktiolla.

Ratkaisun viimeistely. Riittää siis löytää luvut x, joilla $x + x^{-1}$ on kokonaisluku. Kirjoitetaan $x + x^{-1} = m$. Tämä on toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisut ovat

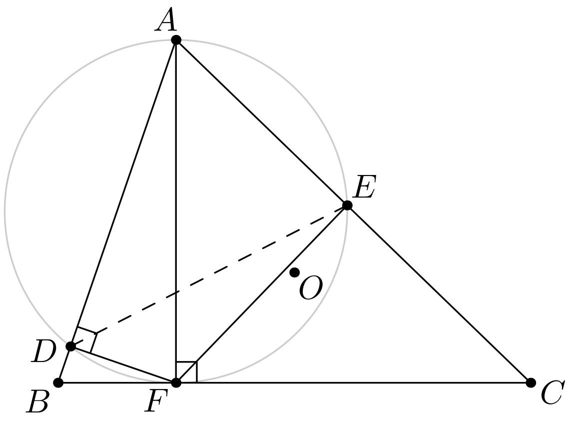
$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1}.$$

Ratkaisut ovat reaalisia, kun $m \neq -1, 0, 1$.

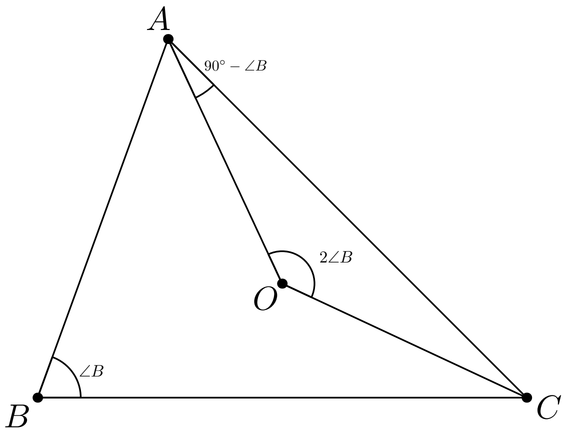
3. Ympyrä, jonka halkaisija on kolmion ABC kärjestä A piirretty korkeusjana, leikkaa kolmion sivun AB pisteessä D ja sivun AC pisteessä E ($A \neq D$, $A \neq E$). Osoita, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion ADE kärjestä A piirretyllä korkeusjanalla tai sen jatkeella.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia, missä kulmassa korkeusjana ja jana AO ovat kolmion sivuun AC nähden. (Tässä O on kolmion ABC ympärysympyrän keskipiste.)

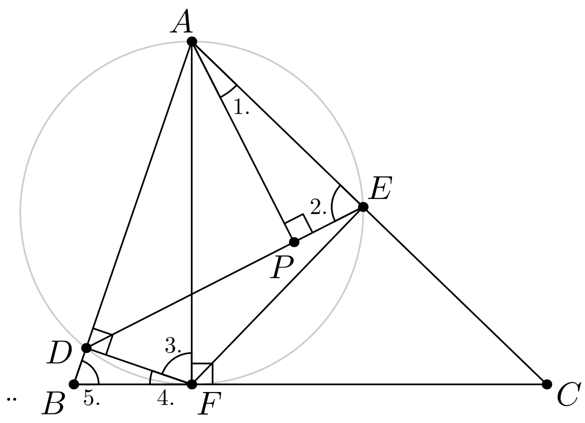
Alla on tilanteesta kuva. Tavoitteena on osoittaa, että AO ja DE ovat kohtisuorassa. Merkitään kolmion kulmia merkinnöin $\angle A, \angle B, \angle C$.



Lasketaan ensin kulma $\angle OAC$. Tämä onnistuu kehäkulmalauseen keskuskulmaversiolla kuvan mukaisesti.



Lasketaan sitten kulma $\angle PAC$, missä P on kärjestä A janalle DE piirretyn kärjen kantapiste. Lasketaan kulmia seuraavan polun kautta.



Siirtymä kulmasta 2 kulmaan 3 käyttää kehäkulmalausetta. Muut vaiheet perustuvat suoriin kulmiin. Saadaan siis

$$\angle PAC = 90° - \angle DEA = 90° - \angle DFA = \angle DFB = 90° - \angle B.$$

Koska $\angle OAC$ ja $\angle PAC$ ovat yhtä suuria, on O suoralla AP.

4. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty positiivisten kokonaislukujen joukossa, ja positiivinen kokonaisluku a toteuttaa ehdot

$$f(a) = f(1995), \quad f(a+1) = f(1996), \quad f(a+2) = f(1997),$$
$$f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1} \quad \text{kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla } n.$$

(i) Osoita, että $f(n+4a) = f(n)$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

(ii) Määritä pienin mahdollinen a.

Vastaus. Pienin mahdollinen a on $a = 3$.

Ratkaisu. (i)-kohta perustuu suoraan laskemiseen, (ii)-kohta puolestaan funktion f jaksollisuuteen ja arvojen tarkasteluun.

(i)-kohta: Yksinkertaisuuden vuoksi merkitään $g(x) = (x-1)/(x+1)$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} g(g(x)) &= \frac{g(x)-1}{g(x)+1} \\ &= \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} \\ &= \frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}} \\ &= \frac{-1}{x}. \end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$g(g(g(g(x)))) = g\left(g\left(\frac{-1}{x}\right)\right) = \frac{-1}{\frac{-1}{x}} = x.$$

Koska $f(n+a) = g(f(n))$ kaikilla n, pätee $f(n+4a) = g(f(n+3a)) = \ldots = g(g(g(g(f(n))))) = f(n)$, mikä on haluttu väite.

(ii)-kohta: Käydään yksitellen läpi a:n arvoja.

Jos $a = 1$, pätee $f(n+4) = f(n)$ kaikilla n. Siis f:n arvot toistuvat neljän välein ja f:llä on saa enintään neljä eri arvoa $f(1), f(2), f(3), f(4)$. Koska $1995 \equiv 3 \pmod 4$, niin ehdon $f(a) = f(1995)$ nojalla $f(1) = f(3)$. Toisaalta (i)-kohdan laskujen nojalla $f(3) = g(g(f(1))) = -1/f(1)$, eli pätee

$$f(1) = \frac{-1}{f(1)}$$

eli $f(1)^2 = -1$. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista.

Jos $a = 2$, pätee $f(n+8) = f(n)$ kaikilla n. Koska $1995 \equiv 3 \pmod 8$, ehdon $f(a) = f(1995)$ nojalla pätee $f(2) = f(3)$. Vastaavasti koska $f(a+1) = f(1996)$ ja $1996 \equiv 4 \pmod 8$, pätee $f(3) = f(4)$. Siis $f(2) = f(4)$. Kuten tapauksessa $a = 1$, nyt $f(2)^2 = -1$, mikä ei ole mahdollista.

Tapaus $a = 3$ kuitenkin käy. Valitaan $f(1)$, $f(2)$ ja $f(3)$ mielivaltaisesti, ja määritellään loput f:n arvot rekursion

$$f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}. \tag{1}$$

Koska $1996 \equiv 3 \pmod{12}$, (i)-kohdan nojalla pätee $f(a) = f(1996)$ ja vastaavasti $f(a+1) = f(1997)$ ja $f(a+2) = f(1998)$.

Tarkistetaan vielä, että yhtälössä (1) ei tule nollalla jakamista. Tämä vaatisi $f(n) = -1$. Tapaus $f(n) = -1$ puolestaan vaatii $n \leq 3$ tai $f(n-3) = 0$. Tapaus $f(n-3) = 0$ vaatii $n-3 \leq 3$ tai $f(n-6) = 1$. Mutta $(x-1)/(x+1)$ ei ole koskaan 1. Siis kunhan valitaan $f(1), f(2)$ ja $f(3)$ erisuuriksi kuin $-1, 0$ ja 1, niin määrittely (1) toimii.