Vuoden 1997 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Jos A on joukko, jonka alkiot ovat seitsemän positiivista lukua, niin kuinka monta A:n alkioista muodustuvaa kolmikkoa (x, y, z), missä $x < y$ ja $x + y = z$, on enintään olemassa?

Vastaus. Tällaisia kolmikoita voi olla enimmillään yhdeksän.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia, miten kolmikoiden määrä kasvaa, kun lukujen määrä lisääntyy.

Olkoon $f(n)$ suurin mahdollinen kolmikoiden määrä, kun lukuja on n. Tavoitteena on laskea $f(7)$. Selvästi $f(1) = f(2) = 0$ ja $f(3) = 1$.

Väite. Pätee
$$f(n+1) \leq f(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$
kaikilla $n \geq 3$.

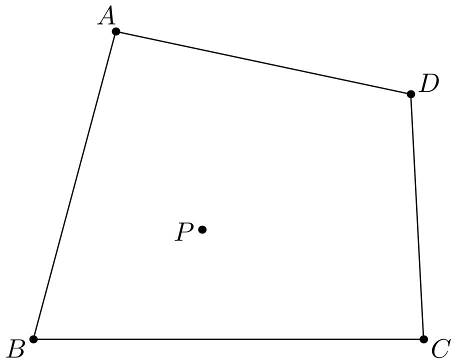
Väitteen todistus. Olkoot $a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1}$ jotkin luvut. Haluttuja kolmikoita (x, y, z), joissa $x < y$, $x + y = z$ ja joissa a_{n+1} on mukana on enimmillään $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Luvun a_{n+1} tulee nimittäin vastata lukua z, ja kukin luvuista $a_1, \ldots, a_n$ voi esiintyä enintään yhdessä tällaisessa kolikossa.

Koska kolmikoita (x, y, z), joissa lukua $a_1, \ldots, a_n$ ei esiinny, on enintään $f(n)$, pätee täten
$$f(n+1) \leq f(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Ratkaisun viimeistely. Nyt saadaan $f(4) \leq 2$, $f(5) \leq 4$, $f(6) \leq 6$ ja $f(7) \leq 9$. Toisaalta on mahdollista, että kolmikkoja on yhdeksän: lukujen
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$
joukosta voidaan valita kolmikot
$$\begin{aligned}
&(1,2,3), (1,3,4), (1,4,5), (1,5,6), (1,6,7),\\
&(2,3,4), (2,4,6), (2,5,7),\\
&(3,4,7).
\end{aligned}$$

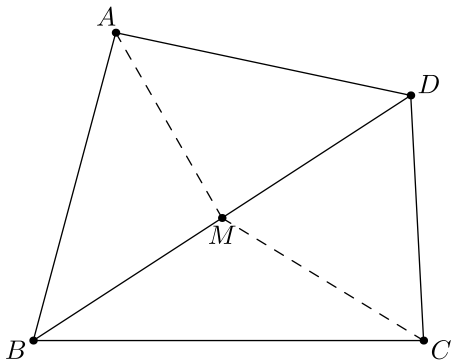
2. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio. Oletetaan, että nelikulmion sisällä on piste P, jolle kolmioiden ABP, BCP, CDP ja DAP alat ovat samat. Osoita, että nelikulmion lävistäjistä ainakin toinen jakaa toisen kahteen yhtä pitkään osaan.

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu siihen, että P:n tulee olla jommallakummalla monikulmion lävistäjistä.



Jotta kolmioiden ABP ja ADP alat ovat samat, tulee pisteiden B ja D olla yhtä kaukana suorasta AP. Siis suora AP puolittaa janan BD. Vastaavasti suora CP puolittaa janan BD.

Tutkitaan sitten kahta tapausta. Jos lävistäjän BD keskipiste on lävistäjällä AC, olemme valmiit. Muussa tapauksessa tilanne näyttää seuraavalta:



Koska A, P ja M sekä C, P ja M ovat samalla suoralla, tulee päteä $P = M$.

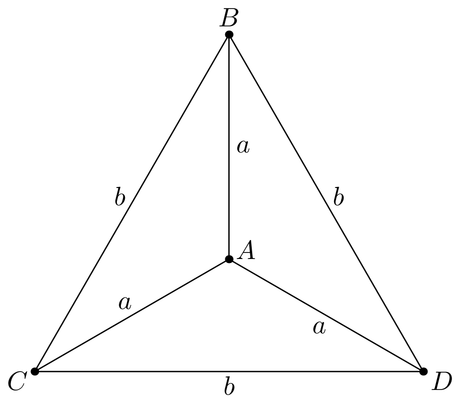
Kuten aiemmin todetaan, että BP ja DP puolittavat janan AC. Tästä seuraa, että lävistäjä BD puolittaa lävistäjän AC.

3. Olkoot A, B, C ja D neljä eri pistettä tasossa. Janoista Ab, Ac, AD, BC, BD ja CD kolmen pituus on a. Muiden kolmen pituus on b, missä $b > a$. Määritä osamäärän $\frac{b}{a}$ kaikki mahdolliset arvot.

Vastaus. Suhteen $\frac{b}{a}$ mahdolliset arvot ovat $\sqrt{3}$ ja $2\cos(36°) = (\sqrt{5}+1)/2$.

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu tapauksien tutkimiseen sen mukaan, miten a-pituiset sivut asettuvat neljän pisteen välille.

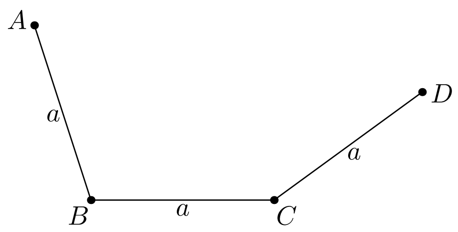
Tutkitaan ensin tapausta, jossa jostakin kärjestä, esimerkiksi A:sta, lähtee kolme samanpituista janaa. Tällöin kolmio BCD on tasasivuinen kolmio ja A on sen keskipiste.



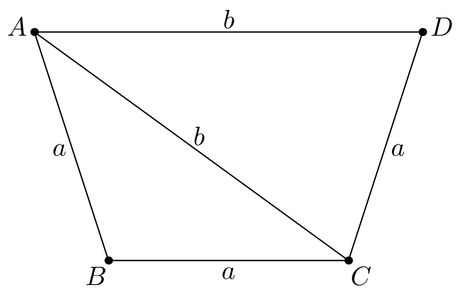
Koska $b > a$, kolmion BCD sivun pituus on b. Suhteen b/a saa laskettua esimerkiksi seuraavasti: kolmion BCD korkeusjanan pituus on $\sqrt{3}b/2$ ja painopiste jakaa mediaanit osiin suhteessa $2:1$, joten

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}b}{2}} = \sqrt{3}.$$

Tutkitaan sitten tapausta, jossa mistään kärjestä ei lähde kolmea samanpituista janaa. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $AB = BC = CD = a$. Tilanne näyttää kutakuinkin seuraavalta:



Koska $a < b$, on kulmien $\angle CBA$ ja $\angle DCB$ oltava tylppiä. Lisäksi kulmien on oltava yhtä suuria, koska kolmioiden ABC ja BCD sivut AC ja BD ovat molemmat b:n pituisia ja kolmiot ovat siten yhteneviä. Lisäksi tulee päteä $AC = AD$, eli kolmion CAD tulee olla tasakylkinen. Täten pisteet A ja D ovat samalla puolella suoraa AC.



Pisteet A, B, C, D ovat siis säännöllisen viisikulmion neljä kärkipistettä. Erityisesti kulma $\angle CBA$ on 108 astetta, ja kosinilauseella

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(108°) = 2a^2(1 + \cos(72°))$$

eli

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2(1+\cos(72^\circ))}.$$

Tätä voi vielä sieventää käyttämällä identiteettiä $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1$, jolloin saadaan

$$\frac{b}{a} = 2\cos(36^\circ).$$

(Lisäksi pätee $\cos(36^\circ) = (\sqrt{5}+1)/4$, joten $\frac{b}{a} = (\sqrt{5}+1)/2$.)

4. Olkoon f ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ määritelty funktio, jolle pätee

$$f(2x) = 2f(x), \quad f(4x+1) = 4f(x)+3 \quad \text{ja} \quad f(4x-1) = 2f(2x-1)-1.$$

Osoita, että f on injektio, ts. että jos $f(x) = f(y)$, niin $x = y$.

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu tarkasteluun modulo 4 ja induktioon.

Huomataan, että jos z on parillinen, niin myös $f(z)$ on parillinen. Lisäksi jos z on pariton, niin myös $f(z)$ on pariton.

Jos taas $z \equiv 1 \pmod 4$ eli $z = 4k+1$, niin $f(z) = 4f(k)+3 \equiv 3 \pmod 4$. Lisäksi jos $z \equiv 3 \pmod 4$ eli $z = 4k-1$, niin pätee $f(z) = 2f(2k-1)-1$, ja koska $f(2k-1)$ on pariton, niin $f(z) \equiv 2-1 \equiv 1 \pmod 4$.

Osoitetaan sitten väite induktiolla. Huomataan, että $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$ ja $f(3) = 5$, joten perustapaukset ovat kunnossa. Osoitetaan, että jos kaikilla $x, y < n$ ehdosta $f(x) = f(y)$ seuraa $x = y$, niin myös kaikilla $x, y < 2n$ ehdosta $f(x) = f(y)$ seuraa $x = y$.

Oletetaan siis, että x ja y ovat sellaisia, että $f(x) = f(y) = c$ ja $x, y < 2n$. Jos c on parillinen, edellisen nojalla x ja y ovat parillisia. Kirjoitetaan $x = 2x'$ ja $y = 2y'$. Nyt $f(x) = 2f(x')$ ja $f(y) = 2f(y')$, joten $f(x') = f(y')$. Induktio-oletuksen nojalla $x' = y'$ ja siten $x = y$.

Jos $c \equiv 3 \pmod 4$, alun huomioiden nojalla pätee $x \equiv y \equiv 1 \pmod 4$. Kirjoitetaan $x = 4x'+1$ ja $y = 4y'+1$. Nyt $f(x) = 4f(x')+3$ ja $f(y) = 4f(y')+3$, joten taas $f(x') = f(y'), x' = y'$ ja $x = y$.

Samoin tapauksessa $c \equiv 1 \pmod 4$ pätee $x \equiv y \equiv 3 \pmod 4$. Kirjoittamalla $x = 4x'-1$ ja $y = 4y'-1$ saadaan taas $2f(2x'-1)-1 = 2f(2y'-1)-1$, joten $2x'-1 = 2y'-1$ ja $x = y$.