Vuoden 1998 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Määritä kaikki rationaalilukujen joukossa määritellyt rationaalilukuarvoiset funktiot f, jotka toteuttavat yhtälön $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$ kaikilla rationaaliluvuilla x ja y.

Vastaus. Ratkaisut ovat funktiot muotoa $f(x)=cx^2$, missä c on jokin rationaaliluku.

Ratkaisu. Idea on todistaa ensin, että $f(nx)=n^2f(x)$ kaikilla kokonaisluvuilla n ja rationaaliluvuilla x.

Sijoitetaan $x=y=0$. Saadaan $2f(0)=4f(0)$ eli $f(0)=0$.

Sijoitetaan $x=y$. Saadaan $f(2y)+f(0)=2f(y)+2f(y)$ eli $f(2y)=4f(y)$.

Sijoitetaan $x=2y$. Saadaan $f(3y)+f(y)=2f(2y)+2f(y)$. Edellistä kohtaa hyödyntämällä saadaan $f(3y)=9f(y)$.

Jatketaan näin. Induktiivisesti saadaan todistettua, että $f(ny)=n^2f(y)$, kun n on positiivinen kokonaisluku ja y on mikä vain rationaaliluku.

Sijoituksella $x=0$ saadaan $f(y)+f(-y)=2f(y)$ eli $f(-y)=f(y)$. Tästä seuraa, että

$$f(ny)=n^2f(y) \tag{1}$$

pätee myös negatiivisilla kokonaisluvuilla n. Se pätee myös, kun $n=0$, koska $f(0)=0$.

Sijoittamalla $y=1$ yhtälöön (1) saadaan $f(n)=n^2f(1)$ kaikilla kokonaisluvuilla n.

Sijoittamalla $y=m/n$ yhtälöön (1) saadaan

$$f(m)=n^2f(m/n).$$

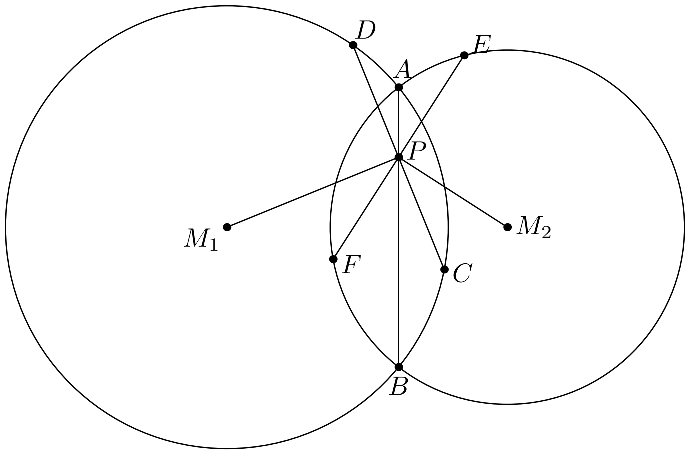
Toisaalta $f(m)=m^2f(1)$. Siis

$$f(m/n)=\frac{m^2}{n^2}f(1).$$

Siis f on muotoa $f(x)=x^2\cdot c$. Huomataan, että mikä tahansa tällainen ratkaisu todella toimii: $c(x+y)^2+c(x-y)^2=2cx^2+2cy^2$. Olemme valmiit.

2. Olkoot C_1 ja C_2 kaksi ympyrää, jotka leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon M_1 C_1:n keskipiste ja M_2 C_2:n keskipiste. Olkoon P janan AB jokin sellainen piste, että $|AP|\neq|BP|$ ja $P\neq A$, $P\neq B$. Piirretään P:n kautta M_1P:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_1:n leikkauspisteitä C:llä ja D:llä. Piirretään samoin P:n kautta M_2P:tä vastaan kohtisuora suora ja merkitään sen ja C_2:n leikkauspisteitä E:llä ja F:llä. Osoita, että C, D, E ja F ovat erään suorakaiteen kärkipisteet.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on käyttää pisteen potenssia.



Todetaan ensin, että $PC = PD$. Tämä pätee symmetrian nojalla (tai: PM_1D ja PM_1C ovat suorakulmaisia kolmioita, joilla on yhteinen kateetti ja yhtä pitkät hypotenuusat, joten ne ovat yhteneviä). Vastaavasti $PE = PF$.

Todetaan sitten, että oikeastaan $PC = PD = PE = PF$. Pisteen P potenssi ympyrän C_1 suhteen antaa nimittäin

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB$$

ja ympyrän C_2 suhteen

$$PA \cdot PB = PE \cdot PF.$$

Täten $PC \cdot PD = PE \cdot PF$. Koska $PC = PD$ ja $PE = PF$, seuraa tästä $PC = PE$.

Sekä CD että EF ovat jännenelikulmion $CFDE$ halkaisijoita, joten $CFDE$ on suorakulmio.

3. (a) Millä positiivisilla luvuilla n on olemassa jono $x_1, x_2, \ldots, x_n$, joka sisältää kunkin luvuista $1, 2, \ldots, n$ tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ on jaollinen k:llä jokaisella $k = 1, 2, \ldots, n$?

(b) Onko olemassa päättymätön jono $x_1, x_2, x_3, \ldots$, joka sisältää jokaisen positiivisen kokonaisluvun tasan kerran ja jolle $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ on jaollinen k:lla kaikilla positiivisilla luvuilla k?

Vastaus. (a) Vain luvuilla $n = 1$ ja $n = 3$ on tämä ominaisuus.

(b): Kyllä.

Ratkaisu. (a)-kohdan idea on tutkia, mitkä ovat jonon kaksi viimeistä lukua. (b)-kohdan idea on rakentaa tällainen jono laittamalla jonon perään yksitellen lukuja kiinalaista jäännöslausetta käyttäen.

(a): Tapauksessa $n = 1$ valitaan $x_1 = 1$, tapauksessa $n = 2$ jonoa ei löydy ja tapauksessa $n = 3$ voidaan valita $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2)$. Oletetaan sitten, että $n \geq 4$.

Tutkitaan arvoja $k = n$, $k = n - 1$ ja $k = n - 2$.

Kun $k = n$, tulee päteä

$$n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tästä seuraa, että luvun n tulee olla pariton.

Kun $k = n - 1$, tulee päteä

$$n - 1 \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + n - x_n = \frac{n(n+1)}{2} - x_n.$$

Koska n on pariton, voidaan kirjoittaa $n = 2m+1$. Pätee siis $2m \mid (2m+1)(m+1) - x_n$, mikä sievenee muotoon $x_n \equiv m + 1 \pmod{2m}$. Koska $1 \le x_n \le 2m + 1$, pätee $x_n = m + 1$.

Kun $k = n - 2$, tulee päte

$$n - 2 \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} = 1 + 2 + \cdots + n - x_n - x_{n-1}.$$

Tutkitaan oikeaa puolta modulo $n - 2 = 2m - 1$:

$$\frac{n(n+1)}{2} - x_n - x_{n-1} = (2m+1)(m+1) - (m+1) - x_{n-1} \equiv m + 1 - x_{n-1} \pmod{2m-1}.$$

Täten $x_{n-1} \equiv m + 1 \pmod{2m-1}$. Ei voi päteä $x_{n-1} = m + 1$, koska luku x_n on $m + 1$. Siten $x_{n-1} \ge (2m - 1) + (m + 1) = 3m$. Toisaalta $x_{n-1} \le n = 2m + 1$. Täten tulee päteä $m \le 1$ eli $n \le 3$.

Täten ei ole ratkaisuja, joissa $n \ge 4$.

(b): Muodostetaan tällainen jono valitsemalla jonoon uusia jäseniä yksitellen. Valitaan aluksi $x_1 = 1$ ja $x_2 = 3$.

Oletetaan sitten, että olemme jo valinneet luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Olkoon m pienin positiivinen kokonaisluku, joka ei vielä esiinny jonossa. Pyritään valitsemaan luku x_{n+1} niin, että voimme sen jälkeen valita $x_{n+2} = m$.

Luvun x_{n+1} tulee toteuttaa ehto $n + 1 \mid x_1 + \cdots + x_{n+1}$, eli

$$x_{n+1} = -(x_1 + \cdots + x_n) \pmod{n+1}.$$

Lisäksi haluamme, että pätee $n + 2 \mid x_1 + \cdots + x_{n+1} + m$, eli

$$x_{n+1} = -(x_1 + \cdots + x_n + m) \pmod{n+2}.$$

Koska $n+1$ ja $n+2$ ovat yhteistekijättömiä, kiinalaisen jäännöslauseen nojalla tällaisia kokonaislukuja x_{n+1} on olemassa. Valitaan niin suuri x_{n+1}, että se on suurempi kuin $x_1, \ldots, x_n$ ja m.

Lisäämällä yllä saadun luvun x_{n+1} jonoon, sitten lisäämällä luvun $x_{n+2} = m$ ja toistamalla prosessi saadaan muodostettua halutunlainen jono.

4. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Laske sellaisten lukujen $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ lukumäärä, joille $\binom{n}{k}$ on pariton. Osoita, että tämä luku on kakkosen potenssi, ts. muotoa 2^p jollakin ei-negatiivisella luvulla p.

Vastaus. Näiden k määrä on $2^{y(n)}$, missä $y(n)$ on ykkösten määrä luvun n binääriesityksessä.

Ratkaisu. Ideana on tutkia lukujen parillisuuksien muutoksia Pascalin kolmiossa siirryttäessä seuraavalle riville.

Tässä on Pascalin kolmion luvut modulo 2.

$n = 0$: 1
$n = 1$: 1 1
$n = 2$: 1 0 1
$n = 3$: 1 1 1 1
$n = 4$: 1 0 0 0 1
$n = 5$: 1 1 0 0 1 1
$n = 6$: 1 0 1 0 1 0 1
$n = 7$: 1 1 1 1 1 1 1 1
$n = 8$: 1 0 0 0 0 0 0 0 1
$n = 9$: 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
$n = 10$: 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1
$n = 11$: 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
$n = 12$: 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
$n = 13$: 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
$n = 14$: 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
$n = 15$: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$n = 16$: 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

Pascalin kolmiossa luku on sen kahden yläpuolella olevan luvun summa. Täten jos rivin n kaikki luvut ovat 1 (mod 2), niin rivillä $n+1$ vain ensimmäinen ja viimeinen luku ovat 1 (mod 2). Tällöin rivit $n+2, n+3, \ldots, 2n+1$ muodostuvat kahdesta rivien $0, 1, \ldots, n$ kopiosta.

Tästä seuraa induktiolla, että kaikilla m rivi $n = 2^m - 1$ muodostuu pelkästään ykkösistä ja rivi 2^m sisältää ykkösiä vain alussa ja lopussa. Edelleen, rivit $2^m, 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1} - 1$ muodostuvat kahdesta rivien $0, 1, \ldots, 2^m - 1$ kopiosta.

Olkoon nyt $N(n)$ rivin n parittomien lukujen määrä. Tällöin $N(0) = 1, N(1) = 2$ ja niin edelleen. Jos kirjoitetaan $n = 2^m + r$, missä $0 \leq r < 2^m$, seuraa edellisen nojalla $N(n) = 2N(r)$. Tästä seuraa, että $N(n)$ on aina kakkosen potenssi.

Todetaan vielä, että $N(n) = 2^{y(n)}$, missä $y(n)$ on ykkösten määrä luvun n binääriesityksessä. Tämä seuraa yllä saadusta yhtälöstä $N(n) = 2N(r)$ ja yhtälöstä $y(2^m + r) = 1 + y(r)$ induktiolla.