Vuoden 1999 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio f toteuttaa ehdon

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n+11)), & \text{jos } n \leq 1999 \\ n-5, & \text{jos } n > 1999. \end{cases}$$

Etsi yhtälön $f(n) = 1999$ kaikki ratkaisut.

Vastaus. Yhtälön ratkaisut ovat $n = 6, 12, 18, \ldots, 1998, 2004$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia f:n arvoja, aloittaen luvuista lähellä lukua 1999, ja huomata jaksollisuus.

Huomataan ensin, että jos $n \geq 2005$, niin $f(n) = n - 5 \geq 2000$, eli täältä ei löydy ratkaisuja. Tutkitaan siis vain lukuja $n \leq 2004$.

Lähdetään taulukoimaan f:n arvoja. Pienellä laskemisella saadaan seuraava taulukko.

n	$f(n)$
2004	1999
2003	1998
2002	1997
2001	1996
2000	1995
1999	2000
1998	1999
1997	1998
1996	1997
1995	1996
1994	1995
1993	2000
1992	1999
1991	1998
1990	1997

Löytyy säännönmukaisuus: f:n arvot toistuvat kuuden välein. On luonteva ajatella f:n arvot niin, että luvuilla $2000 \leq n \leq 2005$ pätee $f(n) = n - 5$, ja arvoilla $n < 2000$ samat arvot toistuvat.

Huomataan, että $2005 \equiv 1 \pmod 6$, joten väitteen voi muotoilla seuraavasti: $f(6n + 1 - k) = 2000 - k$, kun $0 \leq k \leq 5$ ja $n \leq 334$.

Todistetaan tämä induktiolla muuttujan n suhteen. Pohjatapukset $n = 334$ ja $n = 333$ ovat taulukoinnin nojalla käsitelty. Tutkitaan sitten induktioaskelta. Jos $0 \leq k \leq 4$, niin pätee

$$\begin{aligned} f(6n+1-k) &= f\left(f(6n+12-k)\right) = f\left(f\left(6(n+2)+1-(k+1)\right)\right) \\ &\overset{\text{i.o.}}{=} f\left(2000-(k+1)\right) \\ &= f(1998+1-k) = f(6 \cdot 333 + 1 - k) \\ &= 2000 - k. \end{aligned}$$

Tapaus $k = 5$ on samanlainen.

Tästä seuraa, että yhtälön $f(n) = n$ ratkaisut ovat täsmälleen kuudella jaolliset luvut lukuun 2004 saakka, eli $n = 6, 12, \ldots, 2004$.

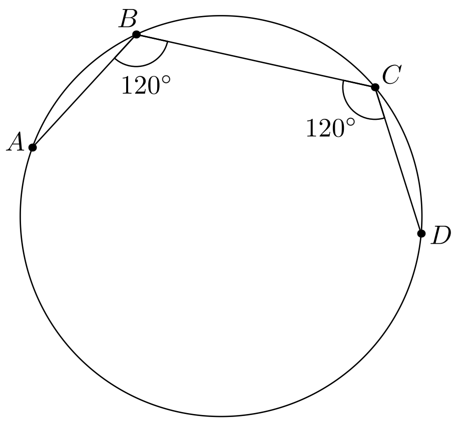
2. Ympyrän sisään piirretyn seitsenkulmion kaikki sivut ovat eripituisia. Kuinka monta 120°:een kulmaa tällaisessa seitsenkulmiossa voi enintään olla?

Vastaus. Kaksi.

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu kahteen huomioon: mitkään kaksi vierekkäistä kulmaa voi olla 120 asteen kulmia, ja kolmen 120 kulman tapaus ei toimi.

On helppo nähdä, että kaksi 120 asteen kulmaa on mahdollista. Osoitetaan, ettei yli kahta voi olla.

Huomataan, että mitkään kaksi vierekkäistä kulmaa eivät voi olla 120 asteen kulmia. Tutkitaan seuraavaa kuvaa.



Jos kaksi vierekkäistä kulmaa $\angle ABC$ ja $\angle BCD$ ovat yhtä suuria, ovat niitä vastaavat (pidemmät) kaaret $\widehat{AC}$ ja $\widehat{BD}$ yhtä suuria. Näillä on yhteisenä osana kaari $\widehat{AD}$ ja eri osina kaaret $\widehat{BA}$ ja $\widehat{DC}$. Täten sivut BA ja DC ovat yhtä pitkiä.

Siis kyseessä olevalla seitsenkulmiolla ei voi olla kahta vierekkäistä kulmaa, jotka ovat 120 astetta, joten tällaisia kulmia on enintään kolme.

Vielä pitää poissulkea tapaus, jossa kolme kulmaa ovat 120 astetta. Tehdään vastaoletus. Symmetrioiden vuoksi voidaan olettaa, että $\angle B, \angle D$ ja $\angle F$ ovat kaikki 120 astetta. Täten A, C ja E jakavat ympyrän kaaren kolmeen yhtä pitkään osaan ja $G = A$. Tämä ei käy.

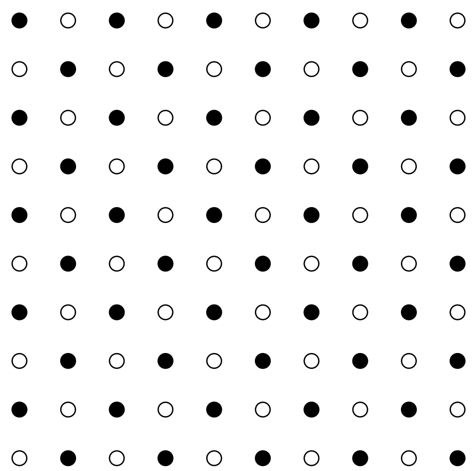
3. Äärettömän kokonaislukutason $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ muodostavat kaikki pisteparit (x, y), missä x ja y ovat kokonaislukuja. Olkoot a ja b ei-negatiivisia kokonaislukuja. Sanomme (a, b)-ratsun siirroksi siirtymistä pisteestä (x, y) mihin hyvänsä pisteistä $(x \pm a, y \pm b)$ tai $(x \pm b, y \pm a)$. Määritä kaikki luvut a ja b, joilla on mahdollista päästä kiinteästä aloituspisteestä lähtien jokaiseen kokonaislukukoordinaattiseen tason pisteeseen (a, b)-ratsun siirtoja käyttämällä.

Vastaus. Kelpaavat luvut ovat ne, joissa $\text{syt}(a, b) = 1$ ja tasan yksi luvuista a ja b on parillinen.

Ratkaisu. Ratkaisussa ensin todetaan, että tiettyjen välttämättömien ehtojen tulee täyttyä. Tämän jälkeen osoitetaan (a, b)-ratsujen toimivan käyttämällä Bezout'n lemmaa.

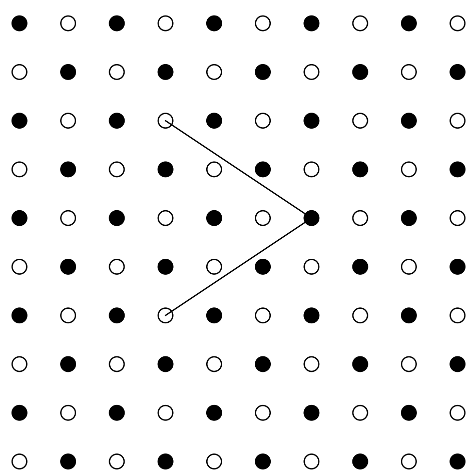
Huomataan ensiksi, että tulee päteä $d = \operatorname{syt}(a, b) = 1$. Muussa tapauksessa siirtymissä aina sekä x- että y-koordinaatit muuttuisivat d:llä jaollisella määrällä, eikä kaikkiin ruutuihin voitaisi päästä.

Lisäksi molemmat luvuista a ja b eivät voi olla parittomia: jos kokonaislukupisteet värittää mustaksi ja valkoiseksi shakkilaudan tapaan, ei (a, b)-ratsu voisi koskaan päästä eri väriselle ruudulle.



Osoitetaan sitten, että jos $\operatorname{syt}(a, b) = 1$ ja toinen luvuista a ja b on parillinen ja toinen pariton, niin jokaiseen kokonaislukupisteeseen päästään.

Huomataan, että mistä tahansa ruudusta voi siirtyä $2a$ verran johonkin suuntaan kahden siirron avulla: $(x, y) \to (x + b, y + a) \to (x.y + 2a)$. Alla on havainnollistus tapauksessa $a = 2, b = 3$.



Vastaavasti (a, b)-ratsu voi siirtyä johonkin suuntaan $2b$ verran.

Koska $\operatorname{syt}(a, b) = 1$, on Bezout'n lemman nojalla olemassa kokonaisluvut x ja y, joilla $ax + by = 1$. Tällöin $2ax + 2by = 2$. Siis siirtymällä x kertaa $2a$:n verran ja y kertaa $2b$:n verran päästään kahden päähän aloitusruudusta. (Jos x tai y on negatiivinen, siirrytään vastakkaiseen suuntaan.)

Täten (a,b)-ratsu voi siirtyä aloitusruudustaan kahden päähän mihin tahansa suuntaan. Toisaalta (a,b)-ratsu voi siirtyä aloitusruudustaan (x,y) ruutuun $(x+a, y+b)$, missä toinen luvuista a ja b on pariton ja toinen parillinen. Jos esimerkiksi a on pariton, voidaan nyt kahden pituisilla askelilla siirtyä ruudusta $(x+a, y+b)$ ruutuun $(x+1, y)$.

Siis (a,b)-ratsu voi siirtyä yhden verran oikealle tai ylipäätään yhden verran mihin tahansa suuntaan, ja siten päästä mihin tahansa ruutuun.

4. Olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n$ positiivisia reaalilukuja ja $n \geq 1$. Osoita, että

$$n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right)\left(n+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Milloin vallitsee yhtäsuuruus?

Vastaus. Yhtäsuuruus pätee silloin ja vain silloin, kun $a_1 = \ldots = a_n$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ryhmitellä termejä sopivasti ja tätä kautta palauttaa ongelma tapaukseen $n = 2$.

Tapauksessa $n = 1$ epäyhtälö on yhtälö.

Tutkitaan sitten tapausta $n = 2$. Väite on

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y} \geq \left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Vähennetetään termi $(1/(1+x)+1/(1+y)) \cdot 2$ puolittain. Saadaan ekvivalentti väite

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}-\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)\cdot 2 \geq \left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Koska $1/t - 1/(t+1) = 1/t(t+1)$, vasen puoli sievenee muotoon

$$\frac{2}{x(x+1)}+\frac{2}{y(y+1)}.$$

Auki kertomisen ja sieventämisen jälkeen jää todistettavaksi

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{y(y+1)} \geq \frac{1}{(1+x)y}+\frac{1}{(1+y)x}. \tag{1}$$

Tämän voi todistaa kertomalla puolittain luvulla $x(x+1)y(y+1)$, jolloin jäljelle jää $y(y+1)+x(x+1) \geq x(y+1)+y(x+1)$ eli sievennettynä $x^2+y^2 \geq 2xy$, mikä on tosi. Yhtäsuuruus pätee täsmälleen silloin, kun $x = y$.

Tutkitaan sitten yleistä tapausta. Kuten edellä, vähentämällä termi $n/(1+a_1)+\ldots+n/(1+a_n)$ puolittain jää jäljelle

$$\frac{n}{a_1(a_1+1)}+\cdots+\frac{n}{a_n(a_n+1)} \geq \left(\frac{1}{1+a_1}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\right)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Kerrotaan oikea puoli auki. Ulos tulee termejä muotoa $\frac{1}{(1+a_i)a_j}$. Termit, joissa $i = j$, kumoavat vasemmalta puolelta vastaavia termejä. Termeillä, joissa $i \neq j$, tulee myös vastaava termi $\frac{1}{(1+a_j)a_i}$. Epäyhtälön (1) nojalla pätee

$$\frac{1}{a_i(a_i+1)} + \frac{1}{a_j(a_j+1)} \geq \frac{1}{(1+a_i)a_j} + \frac{1}{(1+a_j)a_i}.$$

Väite seuraa summaamalla nämä epäyhtälöt.

Koska epäyhtälössä (1) pätee yhtäsuuruus silloin ja vain silloin kun $x = y$, pätee yleisessä tapauksessa yhtäsuuruus vain silloin kun luvut ovat kaikki yhtä suuria.