Vuoden 2000 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Monellako tavalla luku 2000 voidaan kirjoittaa kolmen positiivisen, ei välttämättä eri suuren kokonaisluvun summana? (Summia $1 + 2 + 3$, $3 + 1 + 2$ jne. pidetään samoina.)

Vastaus. Tapoja on $1001 \cdot 333 = 333\,333$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ensin tutkia tapojen määriä, kun summattavien järjestyksellä on väliä, ja päätellä tästä vastaus.

Huomataan, että luvun n voi esittää $n-1$ tavalla kahden positiivisen kokonaisluvun summana, jos esimerkiksi summia $1 + 2$ ja $2 + 1$ pidetään eri summina: tavat ovat $1 + (n - 1), 2 + (n - 2), \dots, (n - 1) + 1$.

Tutkimalla tapauksia ensimmäisen summattavan suhteen saadaan, että tapoja esittää 2000 kolmen luvun summana kun järjestyksellä on väliä, on

$$1998 + 1997 + \ldots + 1 = \frac{1998 \cdot 1999}{2} = 999 \cdot 1999.$$

Jotkin summat tulee lasketuiksi moneen kertaan. Jos summassa esiintyy kolme eri lukua, tulee se lasketuksi $3! = 6$ kertaa, ja jos summassa esiintyy kaksi eri lukua, tulee se lasketuksi 3 kertaa.

Summia, joissa on kaksi samaa lukua ja järjestyksellä ei ole väliä, on 999: jos luku x esiintyy summassa kahdesti, tulee päteä $x \le 999$, ja toisaalta jokaista tällaista x:n arvoa vastaa summa $x + x + (2000 - 2x)$.

Täten summia, joissa kaikki kolme lukua ovat eri ja järjestyksellä on väliä, on $999 \cdot 1999 - 3 \cdot 999 = 999 \cdot 1996$.

Täten vastaus, kun järjestyksellä ei ole väliä, on

$$\frac{999 \cdot 1996}{6} + 999 = 333 \cdot 998 + 999 = 333 \cdot 1001 = 333\,333.$$

2. Henkilöt $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_b$ istuvat pöydän ympärillä tässä järjestyksessä, ja jokaisella on jokin määrä kolikoita. Alussa P_1:llä on yksi kolikko enemmän kuin P_2:lla, P_2:lla yksi kolikko enemmän kuin P_3:lla, aina P_{n-1}:een, asti, jolla on yksi kolikko enemmän kuin P_n:llä. Sitten P_1 antaa P_2:lle yhden kolikon, tämä puolestaan antaa P_3:lle kaksi kolikkoa jne., aina P_n:ään asti, joka antaa P_1:lle n kolikkoa. Kolikkojen antamista jatketaan samalla tavalla: P_1 antaa $n + 1$ kolikkoa P_2:lle, P_2 antaa $n + 2$ kolikkoa P_3:lle; tällä tavoin prosessi jatkuu, kunnes jollakin henkilöistä ei enää ole riittävästi kolikkoja, ts. hän ei kykene antamaan pois yhtä kolikkoa enemmän kuin oli juuri saanut. Sillä hetkellä kun prosessi päättyy, havaitaan, että pöydän ääressä on kaksi naapurusta, joista toisella on tasan viisi kertaa niin paljon kolikkoja kuin toisella. Määritä pöydän ääressä istuvien ihmisten lukumäärä ja pöydän ympärillä kiertävien kolikkojen yhteismäärä.

Vastaus. On kaksi mahdollisuutta: ihmisiä on $b = 3$ ja kolikoita on 6 tai ihmisiä on $b = 9$ ja kolikoita on 63.

Ratkaisu. Ratkaisu perustuu kolikoiden määrien muuttumisen tutkimiseen kunkin kierroksen jälkeen ja sopivan yhtälön pystyttämiseen.

Olkoon m henkilön P_n kolikoiden määrä alussa. Tällöin henkilöillä $P_{n-1}, \ldots, P_1$ on $m+1, \ldots, m+(n-1)$ kolikkoa. Kolikoita on pöydässä yhteensä $nm+1+2+\ldots+(n-1)$.

Kun kierros lähtee liikkeelle P_1:stä ja jokainen henkilöistä $P_1, P_2, \ldots, P_n$ on vuorollaan antanut eteenpäin kolikoita, on henkilöllä P_n jäljellä $m-1$ kolikkoa, P_{n-1}:llä m kolikkoa ja niin edelleen. Yleisesti kullakin kierroksella kunkin henkilön kolikoiden määrä pienenee yhdellä.

Kierrosten edetessä päädytään jossakin kohtaa tilanteeseen, jossa henkilöllä P_n jää vuoronsa jälkeen 0 kolikkoa. Tämän jälkeen vuoro etenee vielä kerran ja prosessi päättyy, kun P_n:llä ei ole riittävästi kolikoita antaa eteenpäin. Henkilöillä $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_1$ on tällöin $0, 1, \ldots, n-2$ kolikkoa ja henkilöllä P_n on loput eli

$$nm + 1 + 2 + \ldots + (n-1) - (1 + 2 + \ldots + (n-2)) = nm + (n-1).$$

Annetun ehdon nojalla pätee

$$nm + (n-1) = 5(n-2)$$

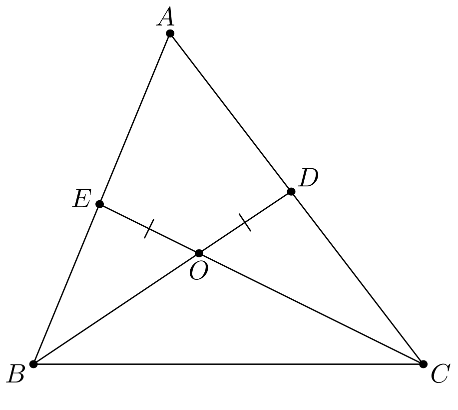
eli sievennettynä

$$n(m-4) = -9.$$

Koska $n > 1$, saadaan ratkaisuiksi $n = 3$ ja $m = 1$ tai $n = 9$ ja $m = 3$. Ensimmäisessä tapauksessa kolikoita on $3 + 2 + 1 = 6$ ja toisessa $11 + 10 + \ldots + 3 = 63$.

3. Kolmiossa ABC kulman B puolittaja leikkaa AC:n D:ssä ja kulman C puolittaja leikkaa AB:n E:ssä. Kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa pisteessä O. Lisäksi $OD = OE$. Todista, että joko ABC on tasakylkinen tai $\angle BAC = 60°$.

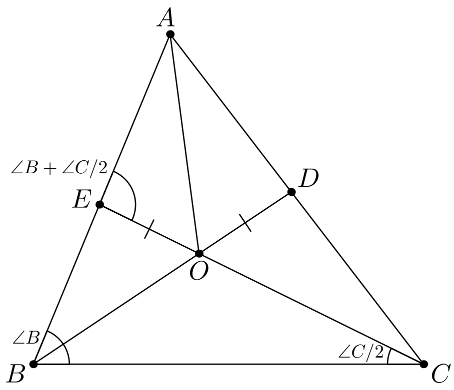
Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia kolmioiden AOE ja AOD yhtenevyyttä.



Tutkitaan kolmioita AOE ja AOD. Niillä on kaksi yhtä pitkää sivua. Lisäksi niiden kärjen A kulmat ovat yhtä suuret, koska O on kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste. Yhtenevyyssääntö ssk kertoo, että AOE ja AOD ovat yhteneviä tai $\angle OEA + \angle ADO = 180°$. Siis $\angle OEA = \angle AOD$ tai $\angle OEA + \angle AOD = 180°$.

Kulmien laskeminen antaa

$$\angle OEA = \angle B + \frac{\angle C}{2} \quad \text{ja} \quad \angle ADO = \angle C + \frac{\angle B}{2}.$$



Tapauksessa $\angle OEA = \angle ADO$ saadaan täten $\angle B = \angle C$, ja kolmio ABC on tasakylkinen.

Tapauksessa $\angle OEA + \angle ADO = 180°$ saadaan

$$\frac{3}{2}(\angle B + \angle C) = 180°,$$

ja koska $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, pätee nyt $\angle A = 60°$.

4. Reaaliarvoinen funktio f on määritelty, kun $0 \le x \le 1$. Lisäksi $f(0) = 0, f(1) = 1$ ja

$$\frac{1}{2} \le \frac{f(z) - f(y)}{f(y) - f(x)} \le 2$$

kaikille $0 \le x < y < z \le 1$, joille $z - y = y - x$. Osoita, että

$$\frac{1}{7} \le f\left(\frac{1}{3}\right) \le \frac{4}{7}.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia samanaikaisesti lukuja $f(1/3)$ ja $f(2/3)$ ja muodostuvaa epäyhtälöryhmää.

Merkitään $a = f(1/3)$ ja $b = f(2/3)$. Sijoittamalla annettuun epäyhtälöön $x = 0, y = 1/3, z = 2/3$ saadaan

$$\frac{1}{2} \le \frac{b - a}{a - 0} \le 2 \tag{1}$$

ja sijoittamalla $x = 1/3, y = 2/3, z = 1$ saadaan

$$\frac{1}{2} \le \frac{1 - b}{b - a} \le 2. \tag{2}$$

Todetaan ensin, että a on positiivinen. Jos nimittäin a on negatiivinen, tulee epäyhtälön (1) nojalla myös luvun $b - a$ olla negatiivinen, ja täten epäyhtälön (2) nojalla myös $1 - b$ on negatiivinen. Täten $1 - b < 0$ eli $1 < b$ ja $a < 0$, jolloin $b - a > 1$, mikä on ristiriita. Täten a on positiivinen, ja nyt epäyhtälön (1) nojalla myös $b - a$ on positiivinen.

Saamme siis kertoa epäyhtälöitä auki. Kertomalla (1) luvulla $2a$ saadaan

$$a \leq 2b - 2a \leq 4a.$$

Toisesta epäyhtälöstä saadaan

$$b - a \leq 2 - 2b \leq 4b - 4a.$$

Näistä yhdistelmällä saadaan ylä- ja alarajoja luvulle a. Ensimmäisestä epäyhtälöstä saadaan $a \leq 2b - 2a$ eli $a \leq 2b/3$, ja yhdistämällä tämä toiseen epäyhtälöön $b - a \leq 2 - 2b$ eli $3b \leq a + 2$ saadaan

$$a \leq \frac{2}{3}b \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{a+2}{3},$$

mikä sievenee muotoon $a \leq 4/7$.

Vastaavasti ensimmäisestä epäyhtälöstä saadaan $2b - 2a \leq 4a$ eli $b \leq 3a$ ja toisesta epäyhtälöstä saadaan $2 - 2b \leq 4b - 4a$ eli $4a \leq 6b - 2$. Täten

$$4a \leq 6b - 2 \leq 18a - 2,$$

mistä saadaan $a \geq 1/7$.