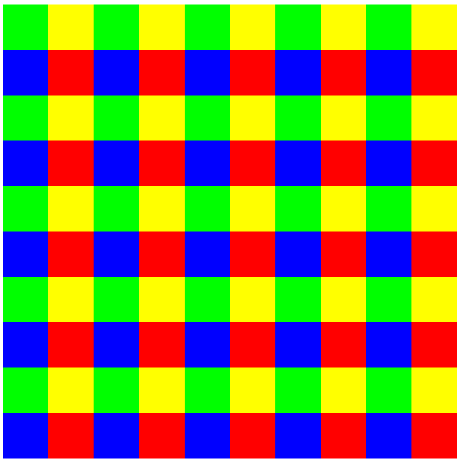
# 15. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

## Tehtävien ratkaisuja

**1.** Olkoon $A$ äärellinen kokoelma serllaisia koordinaattitason neliöitä, että jokaisen $A$:han kuuluvan neliön kärkipisteet ovat muotoa $(m,n), (m+1,n), (m,n+1)$ ja $(m+1,n+1)$ joillain kokonaisluvuilla $m$ ja $n$. Osoita, että on olemassa sellainen $A$:n osakokoelma $B$, että $B$:hen kuuluu ainakin 25% $A$:n neliöistä, mutta millään kahdella $B$:n neliöllä ei ole yhteisiä kärkipisteitä.

**Ratkaisu.** Ratkaisun idea on jakaa kaikki kokonaislukuneliöt neljään joukkoon ja tutkia $A$:n neliöiden sijoittumista näihin joukkoihin.

Tutkitaan kaikkia neliöitä, joiden kärkipisteet ovat muotoa $(m,n), (m+1,n), (m,n+1)$ ja $(m+1,n+1)$. Väritetään nämä neljällä värillä seuraavan kuvan mukaisesti.



On jokin väri, jonka värisillä ruuduilla on vähintään 25% $A$:n neliöistä. Valitaan $B$:ksi ne $A$:n neliöt, jotka ovat tämän värisissä ruuduissa. Selvästikään $B$:n neliöillä ei ole yhteisiä kärkipisteitä.

**2.** Olkoon $f$ rajoitettu reaaliarvoinen funktio, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla $x$ ehdon

$$f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{5}{6}\right).$$

Osoita, että $f$ on jaksollinen. (Funktio $f$ on rajoitettu, jos on olemassa luku $L$ siten, että $|f(x)|<L$ kaikilla reaaliluvuilla $x$. Funktio $f$ on jaksollinen, jos on olemassa positiivinen luku $k$ siten, että $f(x+k)=f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla $x$.)

**Ratkaisu.** Esitetään kaksi eri ratkaisua. Ensimmäinen perustuu algebralliseen manipulaatioon, toinen lineaaristen rekursioiden teoriaan.

*1. ratkaisu (algebrallinen manipulaatio).* Merkitään $g(x)=f(x/6)$. Nyt $g$ on rajoitettu ja tehtävän yhtälö antaa

$$g(t+2)+g(t+3)=g(t)+g(t+5)$$

eli

$$g(t+5) = g(t+3) + g(t+2) - g(t).$$

Voidaan laskea, että kaikilla $t$ pätee $g(t+12) - g(t+6) = g(t+6) - g(t)$. Sievennetään lauseketta $g(t+12)$ toistuvasti käyttämällä saatua yhtälöä. Merkitään yksinkertaisuuden vuoksi $a_n = g(t+n)$. Pätee

$$\begin{aligned}
a_{n+12} - a_{n+6} &= a_{n+10} + a_{n+9} - 2a_{n+6} \\
&= (a_{n+8} + a_{n+7} - a_{n+5}) + a_{n+9} - 2a_{n+6} \\
&= (a_{n+8} + a_{n+7} - a_{n+5}) + (a_{n+7} + a_{n+6} - 2a_{n+4}) - 2a_{n+6} \\
&= a_{n+8} + 2a_{n+7} - a_{n+6} - a_{n+5} - 2a_{n+4} \\
&= 2a_{n+7} - 2a_{n+4} - a_{n+3} \\
&= 2a_{n+5} - a_{n+3} - a_{n+2} \\
&= a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_n \\
&= a_{n+6} - a_n.
\end{aligned}$$

Täten induktiolla

$$g(t+6n) - g(t) = n(g(t+6) - g(t)).$$

Koska $g$ on rajoitettu, tulee päteä $g(t+6) - g(t) = 0$. Koska $t$ on mielivaltainen, on $g$ jaksollinen jakson pituudella 6. Täten $f$ on jaksollinen jakson pituudella 1.

*2. ratkaisu (lineaariset rekursiot).*

Olkoon $x$ jokin reaaliluku, ja merkitään $a_n = f(x + n/6)$ kaikilla kokonaisluvuilla $n$. Annettu ehto sanoo

$$a_{n+2} + a_{n+3} = a_n + a_{n+5}$$

eli

$$a_{n+5} = a_{n+3} + a_{n+2} - a_n.$$

Tämä on lineaarinen rekursioyhtälö, jonka karakteristinen polynomi on $x^5 - x^3 - x^2 + 1$. Tämä polynomi jakautuu tekijöihin helppojen nollakohtien avulla:

$$\begin{aligned}
x^5 - x^3 - x^2 + 1 &= (x-1)(x^4 + x^3 - x - 1) \\
&= (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) \\
&= (x-1)^2(x+1)(x^2 + x + 1).
\end{aligned}$$

Merkitään polynomin $x^2 + x + 1$ nollakohtia luvuin $\alpha$ ja $\beta$. (Nollakohdat ovat kompleksisia.) Lineaaristen rekursioiden teorian perusteella $a_n$ on muotoa

$$a_n = c_1 + c_2 n + c_3(-1)^n + c_4\alpha^n + c_5\beta^n$$

joillakin luvuilla $c_1, c_2, c_3, c_4$ ja $c_5$.

Koska $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, pätee $\alpha^3 = \beta^3 = 1$. Tästä nähdään, että

$$\begin{aligned}
a_{n+6} &= c_1 + c_2(n+6) + c_3(-1)^{n+6} + c_4\alpha^{n+6} + c_5\beta^{n+6} \\
&= c_1 + c_2(n+6) + c_3(-1)^n + c_4\alpha^n + c_5\beta^n \\
&= a_n + 6c_2.
\end{aligned}$$

Koska jono $a_n$ on rajoitettu, tulee täten päteä $c_2 = 0$. Tästä seuraa $a_{n+6} = a_n$. Siis $f(x+1) = f(x)$ kaikilla $x$.

**3.** Määritä yhtälön

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} = 0$$

reaalisten juurten lukumäärä.

**Vastaus.** Yhtälöllä ei ole yhtäkään reaalista ratkaisua.

**Ratkaisu.** Ratkaisun idea on tehdä luvun $x$ koosta erilaisia riippuen arvioita sen osoittamiseksi, että yhtälön vasen puoli on postiivinen.

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta funktiolla $f(x)$.

Nähdään heti, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \leq 0$. Jos $x \geq 1$, niin $x^k \geq x^{k-1}$, joten $f(x) > 0$, kun $x \geq 1$.

Vaikein tapaus on $0 < x < 1$. Tätä varten kirjoitetaan $f(x)$ muotoon

$$f(x) = -x(1-x)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4x) + \frac{5}{2}. \qquad (1)$$

Pätee $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (paraabelin $x(1-x)$ suurin arvo saavutetaan nollakohtien puolivälissä). Koska $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4x < 1+2+3+4 = 10$, kun $0 < x < 1$, nähdään, että $f(x) > 0$ myös tässä tapauksessa.

Siis $f(x) > 0$ kaikilla reaaliluvuilla $x$.

**Kommentti.** Esityksen (1) voi keksiä seuraavasti. Jotta saamme osoitettua $f(x) > 0$, tulee osoittaa että

$$g(x) = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x$$

on vähintään $-5/2$, eli että $g(x)$ ei ole "kovin negatiivinen". Jos $x$ on lähellä nollaa, niin kukin $g$:n termeistä on lähellä nollaa ja $g(x)$ on suunnilleen nolla. Samoin jos $x$ on lähellä ykköstä, niin peräkkäiset termit kumoavat toisiaan ja $g(x)$ on suunnilleen nolla.

Nämä huomiot saa formalisoitua toteamalla, että 0 ja 1 ovat $g$:n nollakohtia. Täten $g(x)$ on jaollinen polynomeilla $x$ ja $x - 1$, ja saadaankin

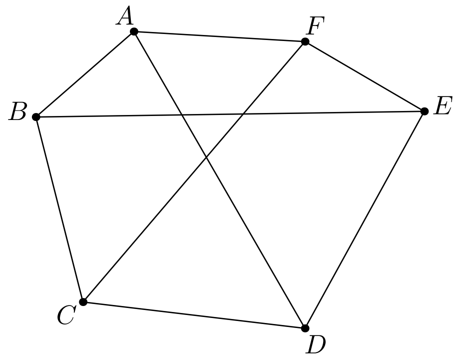
$$\begin{aligned} g(x) &= x(x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 4x - 4) \\ &= x(x-1)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4). \end{aligned}$$

(Kun $x$ on lähellä nollaa, ensimmäinen tulontekijä on suunnilleen nolla ja $g(x)$ on tämän johdosta suunnilleen nolla, ja vastaavasti kun $x$ on lähellä ykköstä on $g(x)$ toisen tulontekijän johdosta suunnilleen nolla.) Tämä antaa yhtälön (1).

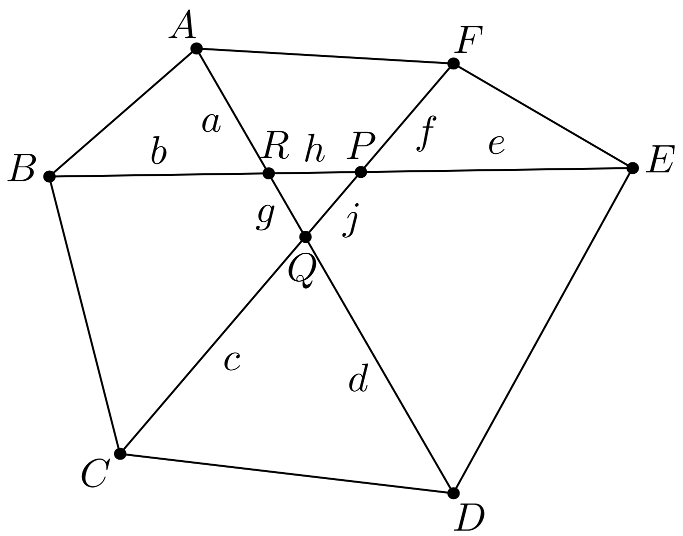
**4.** Olkoon $ABCDEF$ kupera kuusikulmio, jossa kukin lävistäjistä $AD, BE$ ja $CF$ jakaa kuusikulmion kahdeksi nelikulmioksi, joiden alat ovat yhtä suuret. Osoita, että $AD, BE$ ja $CF$ leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

**Ratkaisu.** Ratkaisun idea on tehdä vastaoletus, tutkia eri pinta-aloja ja tutkia saatavaa yhtälöryhmää.

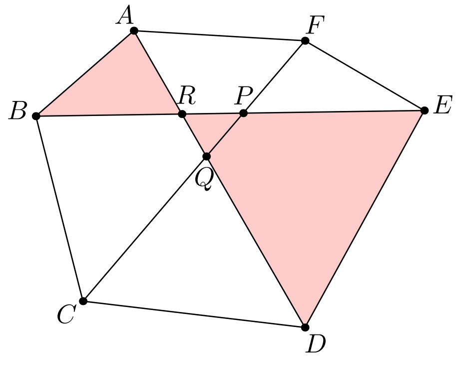
Oletetaan, että $AD, BE$ ja $CF$ eivät leikkaa samassa pisteessä.




Merkitään leikkauspisteitä ja pituuksia seuraavan kuvan mukaisesti.




Huomataan, että kolmioiden $ABR$ ja $DER$ pinta-alat ovat samat: molemmat ovat puolet kuusikulmion alasta miinus nelikulmion $BCDR$ pinta-ala. Siis seuraavan kahden kolmion alat ovat yhtä suuret (kuva ei ole totuudenmukainen).



Toisaalta kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\sin(\alpha)xy$, missä $\alpha$ on kolmion kulma ja $x$ ja $y$ sen viereisten sivujen pituudet. Täten

$$ab = (d+g)(e+h).$$

Symmetrisesti

$$cd = (a+g)(e+j)$$

ja

$$ef = (b+h)(c+j).$$

Kertomalla yhtälöt keskenään saadaan

$$abcdef = (a+g)(b+h)(c+j)(d+g)(e+h)(e+j).$$

Mutta oletuksen nojalla $g, h$ ja $j$ ovat kaikki positiivisia, ja oikea puoli on suurempi kuin vasen. Tämä ei käy. Siis $AD, BE$ ja $CF$ leikkaavat samassa pisteessä.