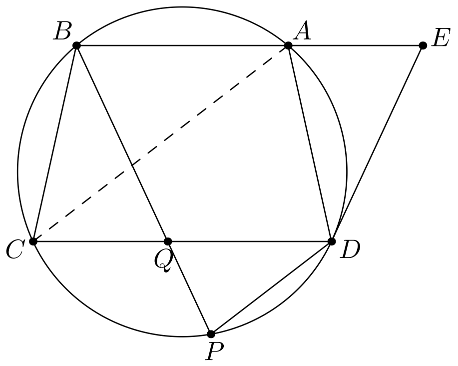
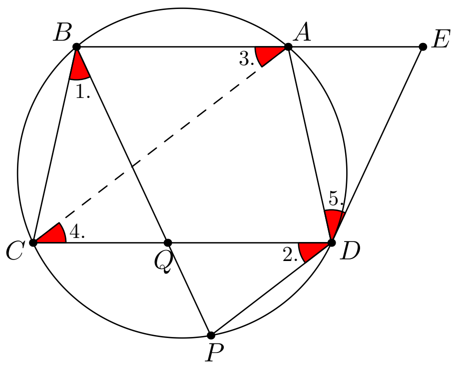
Vuoden 2002 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Puolisuunnikas $ABCD$, missä AB ja CD ovat yhdensuuntaiset ja $AD < CD$, on piirretty ympyrän c sisään. Olkoon DP AC:n suuntainen ympyrän jänne. Oletetaan, että pisteeseen D piirretty c:n tangentti leikkaa suoran AB pisteessä E ja että PB ja DC leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $EQ = AC$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on, että kolmiot BCQ ja DAE ovat yhteneviä.



Tutkitaan kolmioita BCQ ja DAE. Näistä löytyy kaksi yhtä suurta kulmaa: kärjen C kulma on yhtä suuri kuin kärjen A. Lisäksi kehäkulmalauseella, yhdensuuntaisuuksilla ja kehäkulmalauseen tangenttiversion avulla saadaan, että kaikki seuraavaan kuvaan merkityt kulmat ovat yhtä suuria.



Siis kolmioiden BCQ ja DAE kulmat ovat yhtä suuret. Lisäksi niillä on yhtä pitkät sivut BC ja AD. Täten kolmiot ovat yhteneviä, ja erityisesti $CQ = AE$.

2. Kahteen maljaan on sijoitettu yhteensä N palloa, jotka on numeroitu 1:stä N:ään. Yksi pallo siirretään maljasta toiseen. Tällöin kummassakin maljassa olevissa palloissa olevien lukujen keskiarvo kasvaa samalla määrällä, joka on x. Mikä on x:n suurin mahdollinen arvo?

Vastaus. x voi olla suurimmillaan $1/2$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on esittää tehtävä sopivalla tavalla algebrallisesti ja tutkia saatuja yhtälöitä.

Huomataan ensin, että x on $1/2$ silloin, kun yhdessä maljassa on luvut $1, 2, \ldots, k-1$ ja toisessa $k, k+1, \ldots, N$ (missä $2 \leq k < N$), ja pallo k siirretään toisesta maljasta ensimmäiseen. Osoitetaan sitten, ettei x voi olla suurempi kuin $1/2$.

Olkoot n ja m maljoissa olevien pallojen määrät ja a ja b maljoissa olevien pallojen lukujen summat. Huomataan, että $n + m = N$ ja

$$a + b = 1 + 2 + \ldots + N = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Oletetaan, että n palloa sisältävästä maljasta siirretään pallo toiseen maljaan. Olkoon tämän pallon luku q. Nyt

$$\frac{a-q}{n-1} = \frac{a}{n} + x$$

ja

$$\frac{b+q}{m+1} = \frac{b}{m} + x.$$

Ratkomalla näistä yhtälöistä muuttujat a ja b saadaan

$$a = nq + xn(n-1)$$

ja

$$b = mq - xm(m+1). \tag{1}$$

Summaamalla nämä yhtälöt saadaan

$$\frac{N(N+1)}{2} = Nq + xN\left(n - m - 1\right).$$

Tästä saadaan ratkaistua q:

$$q = \frac{N+1}{2} - x(n-m-1) = \frac{N+1}{2} - x(N-2m-1).$$

Nyt b saadaan laskettua yhtälöstä (1).

$$b = m\left(\frac{N+1}{2} - xn\right) = m\left(\frac{m+1}{2} + \frac{n}{2} - xn\right).$$

Koska $b \geq 1 + 2 + \ldots + m = m(m+1)/2$, seuraa tästä $x \leq 1/2$.

3. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reaalilukuja ja olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kaikki eri lukuja. Osoita, että jos kaikki tulot

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \cdots (a_i + b_n),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ ovat keskenään yhtä suuria, niin myös kaikki tulot

$$(a_1 + b_j)(a_2 + b_j) \cdots (a_n + b_j),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ ovat keskenään yhtä suuria.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tulkita ongelmaa polynomien kautta.

Merkitään $P(x) = (x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)$. On annettu, että luvut $P(a_1), \ldots, P(a_n)$ ovat kaikki yhtä suuria kuin jokin luku T. Jos siis merkitään

$$Q(x) = P(x) - T,$$

niin $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat polynomin $Q(x)$ nollakohtia. Koska polynomin $Q(x)$ aste on n, ovat tässä kaikki Q:n nollakohdat, ja täten polynomin nollakohtaesityksellä

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n).$$

Tuloihin $(a_1 + b_j)(a_2 + b_j)\cdots(a_n + b_j)$ pääsee käsiksi tutkimalla arvoa $Q(-b_j)$: pätee

$$(a_1 + b_j)\cdots(a_n + b_j) = (-1)^n Q(-b_j) = (-1)^n(P(-b_j) - T) = -(-1)^n T.$$

Tässä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $-b_j$ on polynomin $P(x) = (x + b_1)\cdots(x + b_n)$ nollakohta. Siis kukin tuloista $(a_1 + b_j)\cdots(a_n + b_j)$ on yhtä suuri kuin $-(-1)^n T$.

4. Eva, Per ja Anna leikittelevät taskulaskimillaan. He valitsevat eri kokonaislukuja ja tarkistavat, ovatko ne jaollisia 11:llä vai eivät. He tutkivat vain sellaisia yhdeksännumeroisia lukuja, joissa esiintyvät kaikki numerot $1, 2, \ldots, 9$. Anna väittää, että jos tällainen luku valitaan umpimähkään, niin todennäköisyys, että se olisi jaollinen 11:llä, on tasan $1/11$. Eva on toista mieltä: hänen mielestään todennäköisyys on alle $1/11$. Perin mielestä todennäköisyys on yli $1/11$. Kuka on oikeessa?

Vastaus. Eva on oikeassa.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on kirjoittaa yhdellätoista jaollisuus kätevämpään muotoon kongruenssien avulla ja sitten käydä tapauksia läpi.

Tutkitaan jotakin kuvatunlaista lukua. Olkoon sen numerot vasemmalta oikealle $a_8, a_7, \ldots, a_0$, jolloin luku on $n = a_8 10^8 + \ldots + 10a_1 + a_0$, ja

$$n \equiv a_8 - a_7 + a_6 - \ldots - a_1 + a_0 \pmod{11}.$$

Toisaalta $a_0 + a_1 + \ldots + a_8 = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45 \equiv 1 \pmod{11}$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} n &\equiv -a_8 - a_7 - \ldots - a_1 - a_0 + (2a_8 + 2a_6 + 2a_4 + 2a_2 + 2a_0) \\ &\equiv 2(a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0) - 1 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Täten n on jaollinen yhdellätoista silloin ja vain silloin, kun $a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0 \equiv 5 \pmod{11}$.

Kirjoitetaan $s = a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_0$. Selvästi $s \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ja $s \leq 9 + 8 + 7 + 6 + 5 \leq 35$. Yhdistettynä tietoon $s \equiv 5 \pmod{11}$ saadaan

$$s = 16 \qquad \text{tai} \qquad s = 27.$$

Tutkitaan, kuinka monta lukua on, joilla $s = 16$. Ainoa tapa saada viiden eri positiivisen kokonaisluvun summaksi 16 on valita luvut $1, 2, 3, 4$ ja 6 jossain järjestyksessä. Näiden paikat voidaan valita $5!$ tavalla ja loppujen numeroiden $5, 7, 8$ ja 9 paikat voidaan valita $4!$ tavalla. Tällaisia lukua on siis $5! \cdot 4!$ kappaletta.

Tutkitaan sitten, kuinka monta lukua on, joilla $s = 27$. Tapoja muodostaa summa 27 on useampia, ja ne voi löytää käymällä järjestelmällisesti viisikoita pienimmästä suurimpaan. Viisikoita on kymmenen:

$$\begin{aligned}
&(1,2,7,8,9),(1,3,6,8,9),(1,4,5,8,9),(1,4,6,7,9),\\
&(2,3,5,8,9),(2,3,6,7,9),(2,4,5,7,9),(2,4,6,7,8),\\
&(3,4,5,6,9),(3,4,5,7,8).
\end{aligned}$$

Kuten edellä, kutakin viisikkoa vastaa $5! \cdot 4!$ lukua.

Yhdellätoista jaollisia lukuja on siis $11 \cdot 5! \cdot 4!$, ja haluttu todennäköisyys on

$$\frac{11 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \frac{11}{126}.$$

Tämä on pienempi kuin $11/121 = 1/11$, eli Eva on oikeassa.