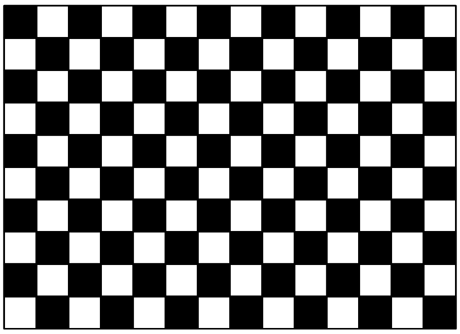
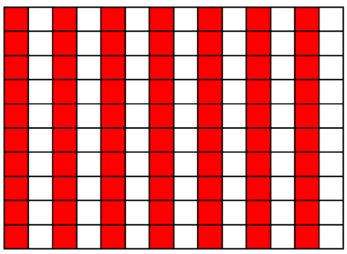
Vuoden 2003 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

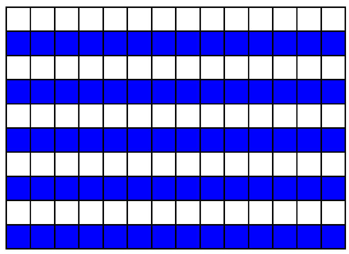
1. 10-riviselle 14-sarakkeiselle shakkiruudukolle asetetaan kiviä. Asettelun jälkeen havaitaan, että kullakin rivillä ja kullakin sarakkeella on pariton määrä kiviä. Näytä, että mustilla ruuduilla on parillinen määrä kiviä, kun ruudut on väritetty tavanomaisesti vuorotellen mustiksi ja valkoisiksi. Huomaa, että yhdellä ruudulla voi olla useampia kiviä.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on laskea yhteen tietyillä riveillä ja sarakkeilla olevien kivien määrät.

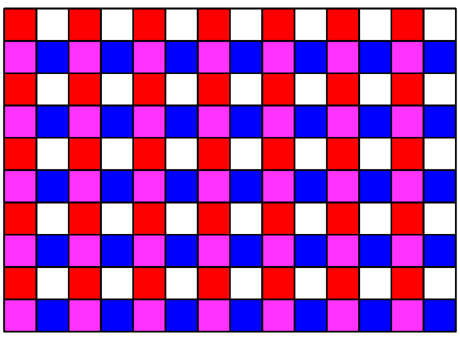


Lasketaan yhteen seuraaviin kuviin merkittyjen rivien ja sarakkeiden kivien määrät.





Alla olevaan kuvaan on merkitty ruudut, joiden kivet tulevat lasketuksi. Risteyskohdissa olevat ruudut tulee laskettua kahdesti.



Huomataan, että mustissa ruuduissa olevat kivet tulevat lasketuksi tasan kerran ja valkoisissa ruuduissa olevat kivet tulevat lasketuiksi kahdesti tai ei kertaakaan.

Koska yhteen laskettujen rivien ja sarakkeiden määrä $7+5=12$ on parillinen, seuraa tästä että mustilla ruuduilla on parillinen määrä kiviä.

2. Etsi kaikki kokonaislukukolmiot (x, y, z), joille

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2003.$$

Vastaus. Yhtälön ratkaisut ovat $(x, y, z) = (668, 668, 667)$ permutaatioineen.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on jakaa vasen puoli tekijöihin.

Tunnettu tekijöihinjako kertoo

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\ &= (x+y+z)\left(\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

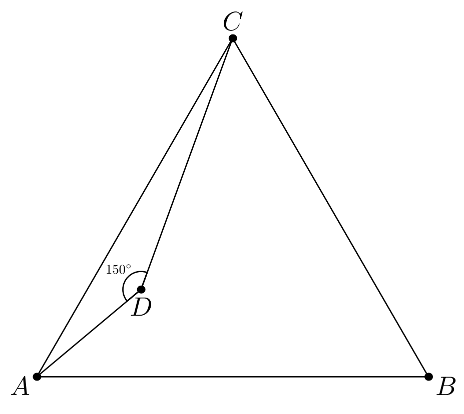
Koska jälkimmäinen tulontekijöistä on epänegatiivinen, tulee myös ensimmäisen olla.

Voidaan tarkistaa, että 2003 on alkuluku. Täten ainoa vaihtoehto on $x+y+z = 2003$, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2$. Kahden neliöistä tulee olla 1 ja kolmannen 0. Tästä seuraa, että kaksi luvuista (x, y, z) on 668 ja kolmas on 667.

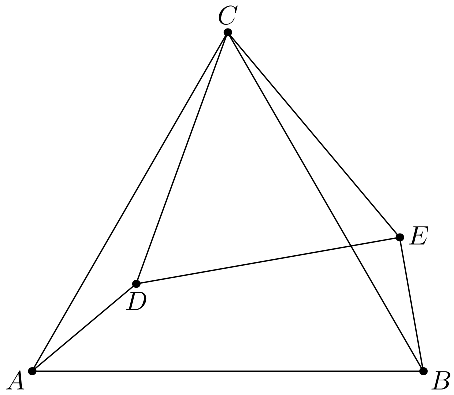
Kommentti. Tekijöihinjaon voi löytää ajattelemalla lauseketta $x^3+y^3+z^3-3xyz$ polyomina x:n suhteen ja huomata nollakohta $x = -(y+z)$. Voi myös ajatella, että tekijöihinjaon polynomien pitää olla symmetrisiä ja toisen polynomeista pitää olla ensimmäisen asteen polynomi, mikä ei jätä montaa mahdollisuutta.

3. Tasasivuisen kolmion ABC sisällä on piste D, jolle pätee $\angle ADC = 150°$. Todista, että kolmio, jonka sivut on $|AD|, |BD|$ ja $|CD|$, on välttämättä suorakulmainen.

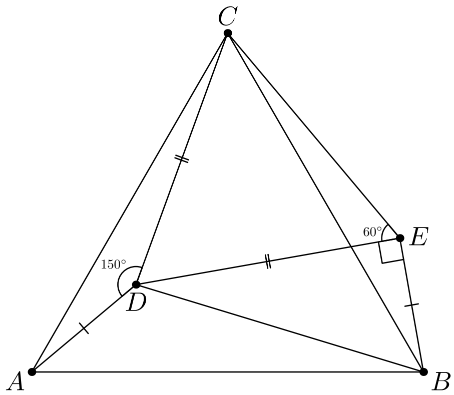
Ratkaisu. Ratkaisun idea on suorittaa kierto pisteen C suhteen.



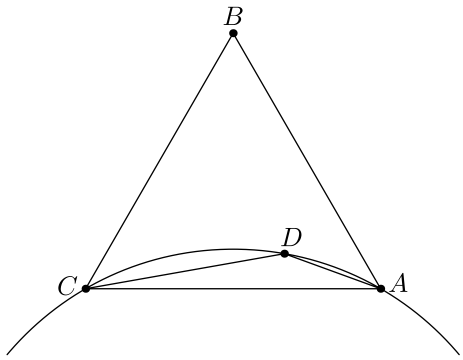
Kierretään kuviota 60 astetta pisteen C suhteen. Piste A kuvautuu pisteeksi B ja piste D kuvautuu seuraavan kuvan pisteeksi E.



Kierron seurauksena CDA ja CEB ovat yhteneviä ja CDE on tasasivuinen kolmio. Täten BED on suorakulmainen kolmio, jonka sivun pituudet ovat AD, BD ja CD.



Kommentti. Tehtävän voi ratkaista myös toisella tavalla käyttämällä analyyttistä geometriaa. Ideana on tulkita ehto $\angle ADC = 150°$ niin, että D sijaitsee erään ympyrän kehällä (nimittäin sen, jonka keskipiste on B:n peilaus AC:n yli ja joka kulkee pisteiden A ja C kautta). Pisteet voi asettaa koordinaatistoon niin, että $A = (1, 0)$, $C = (-1, 0)$ ja $B = (0, \sqrt{3})$, jolloin ympyrän keskipiste on $(-\sqrt{3}, 0)$. Tämän jälkeen voi laskea pituudet AD, BD ja CD ja todistaa väitteen.



4. Olkoon $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nollasta poikkeavien reaalilukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, joille

$$f(x) + f(y) = f(xyf(x + y)),$$

kun $x, y \in \mathbb{R}^*$ ja $x + y \neq 0$.

Vastaus. Pätee $f(z) = 1/z$ kaikilla $z \in \mathbb{R}^*$.

Ratkaisu. Ratkaisun ideana on yrittää valita x ja y niin, että $x = xyf(x + y)$.

Yritetään saada yhtälön termit kumoutumaan valitsemalla x ja y niin, että $f(x) = f(xyf(x + y))$ eli $x = xyf(x + y)$. Koska tällöin pätisi $f(y) = 0$ ja f:n arvot ovat nollasta eroavia, tulee täten päteä $x \neq xyf(x + y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^*$ eli

$$f(x + y) \neq \frac{1}{y}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Olkoon nyt $z \in \mathbb{R}^*$ mielivaltainen. Jos $f(z) \neq 1/z$, voitaisiin valita $y \in \mathbb{R}^*$ niin, että $f(z) = 1/y$ ja sitten valita $x \neq 0$, jolla $x + y = z$, vastoin edellä saatua epäyhtälöä. Täten $f(z) = 1/z$. Siis $f(z) = 1/z$ kaikilla z.