Vuoden 2004 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. 27 palloa, jotka on numeroitu 1:stä 27:ään, on sijoitettu punaiseen, siniseen ja keltaiseen maljaan. Mitkä ovat punaisessa maljassa olevien pallojen mahdolliset lukumäärät, kun tiedetään, että punaisessa, sinisessä ja keltaisessa maljassa olevien pallojen numeroiden keskiarvot ovat 15, 3 ja 18, tässä järjestyksessä?

Vastaus. Punaisessa maljassa voi olla $11, 16$ tai 21 palloa.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on pystyttää maljakkojen pallojen määriä koskevia yhtälöitä ja ratkoa tästä pallojen määrät.

Olkoot p, s ja k punaisen, sinisen ja keltaisen maljan pallojen määrät. Pätee

$$p + s + k = 27. \tag{1}$$

Lisäksi punaisen maljan pallojen lukujen summa on $15p$, sinisen $3s$ ja keltaisen $18k$. Tästä seuraa

$$15p + 3s + 18k = 1 + 2 + \ldots + 27 = 27 \cdot 14$$

eli

$$5p + s + 6k = 9 \cdot 14. \tag{2}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) saadaan

$$4p + 5k = 99.$$

Toisaalta sinisessä maljassa voi olla enimmillään 5 palloa, jotta lukujen keskiarvo voi olla 3. Täten

$$p + k = 27 - k \geq 22.$$

Siten $99 = 4p + 5k \geq 88 + k$. Nyt löydetään, että ainoat ratkaisut ovat $(p, s, k) = (11, 5, 11), (16, 4, 7), (21, 3, 3)$.

Nämä arvot todella ovat mahdollisia:

- $p = 11$: sininen malja $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, punainen malja $\{10, 11, \ldots, 20\}$ (ja keltaiseen loput)
- $p = 16$: sininen malja $\{1, 2, 4, 5\}$, punainen malja $\{7, 8, \ldots, 14, 16, 17, \ldots, 23\}$ (ja keltaiseen loput)
- $p = 21$: sininen malja $\{2, 3, 4\}$, punainen malja $\{5, 6, \ldots, 25\}$ (ja keltaiseen loput)

2. Olkoon $f_1 = 0, f_2 = 1$, ja $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, kun $n = 1, 2, \ldots$, Fibonaccin lukujono. Osoita, että on olemassa aidosti kasvava päättymätön aritmeettinen kokonaislukujono, jonka yksikään luku ei kuulu Fibonaccin jonoon.

[Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.]

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia Fibonaccin lukujonoa modulo 8.

Fibonaccin luvut modulo 8 ovat

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, \ldots$$

Arvot toistavat itseään ja arvoa $4 \pmod 8$ ei esiinny. Täten aritmeettinen lukujono $8k + 4, k = 1, 2, \ldots$ on sellainen, jossa ei esiinny yhtäkään Fibonaccin lukua.

Kommentti. On olemassa muitakin toimivia moduloja ja aritmeettisia jonoja. Esimerkiksi jono $13k + 4$ ei sisällä yhtäkään Fibonaccin lukua.

3. Olkoon $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}, n > 2$, kokonaislukujono. Oletetaan, että luvut x_{i1} eivät kaikki ole samoja. Jos luvut $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$ on määritelty, niin asetetaan

$$x_{i,k+1} = \frac{1}{2}(x_{ik} + x_{i+1,k}), i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad x_{n,k+1} = \frac{1}{2}(x_{nk} + x_{1k}).$$

Osoita, että jos n on pariton, niin jollakin j, k, x_{jk} ei ole kokonaisluku. Päteekö tämä myös silloin, kun n on parillinen?

Vastaus. Väite ei päde silloin, kun n on parillinen.

Ratkaisu. Parittomilla n ideana on tutkia jonon suurimpia ja pienimpiä lukuja ja niiden muuttumista. Parillisilla n löytyy vastaesimerkki.

Tehtävää voi hahmottaa niin, että ringissä on n lukua, jotka toistuvasti korvataan luvun ja sen oikealla puolella olevan luvun keskiarvolla. Merkitään näitä lukuja $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Jos n on parillinen, niin jono

$$2, 0, 2, 0, \ldots, 2, 0$$

toimii vastaesimerkiksi: seuraavalla askeleella jono on $1, 1, \ldots, 1, 1$, ja tästä eteenpäin kaikki luvut ovat ykkösiä.

Oletetaan sitten, että n on pariton.

Väite 1. Ei ole mahdollista, että kaikki luvut ovat jostain pisteestä lähtien samoja.

Todistus. Tehdään vastaoletus. Tutkitaan tilannetta juuri ennen kuin kaikki luvut muuttuvat yhtä suuriksi kuin luku a. Jos luvut ovat tätä ennen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ja $y_1 = a + x$, niin tulee päteä $y_2 = a - x$, $y_3 = a + x$ ja niin edelleen. Koska n on pariton, pätee $y_n = a + x$. Nyt lukujen y_1 ja y_n keskiarvo on $a + x$, ja tulisi olla $x = 0$. Mutta tällöin luvut olivat jo alun perin yhtä suuria. Tämä ei käy.

Väite 2. Ringin suurin luku ei koskaan kasva.

Todistus. Jos kaikki luvut ovat enintään M, niin minkä tahansa kahden luvun keskiarvo on enintään M. Täten seuraavalla askeleella kaikki luvut ovat enintään M.

Väite 3. Ringin pienin luku ei koskaan pienene.

Todistus. Samanlainen todistus kuin väitteelle 2 toimii.

Tutkitaan sitten, mitä tapahtuu, kun prosessi etenee mielivaltaisen pitkään. Oletetaan, että ringin luvut ovat aina kokonaislukuja, jolloin myös suurin ja pienin luku ovat kokonaislukuja.

Väitteiden 2 ja 3 nojalla ringin suurin ja pienin luku lähestyvät toisiaan. Toisaalta väitteen 1 nojalla suurin ja pienin luku eivät koskaan voi olla samat. Täten prosessi päätyy tilanteeseen, jossa suurin ja pienin luku eivät enää muutu ja kaikki luvut eivät ole yhtä suuria. Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista: Tutkitaan ringin suurinta lukua $y_i = M$. Koska y_i ei muutu operaatiota suorittaessa, on sen viereinen luku y_{i+1} myös suuruudeltaan M. Samalla logiikalla kaikki ringin luvut ovat yhtä suuria kuin M, vastoin väitettä 1.

Kommentti. Tehtävään on myös muunlaisia ratkaisuja. Yksi tapa on tutkia lukujen parillisuuksia ja todeta, että mikäli luvut ovat aina kokonaislukuja, niin joko kaikki luvut ovat parillisia tai kaikki ovat parittomia (kun n on pariton). Jos kaikki luvut ovat parillisia, voitaisiin ottaa 2 yhteiseksi tekijäksi ja tutkia pienempiä lukuja. Jos kaikki luvut ovat parittomia, voitaisiin lukujen y_i sijasta vastaavasti tutkia lukuja $(y_i - 1)/2$. Tätä kautta todetaan, että ainoa tapa jossa luvut pysyvät kokonaislukuina on se, jossa ne ovaat jostain pisteestä lähtien yhtä suuria.

4. Olkoot a, b ja c kolmion sivujen pituudet ja olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Osoita, että

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on redusoida ongelma aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä väitteeseen $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$. Tämä väite seuraa Jensenin epäyhtälöllä.

Kirjoitetaan epäyhtälön vasen puoli muotoon

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla pätee $abc \leq (a + b + c)^3/27$, joten

$$\frac{a+b+c}{abc} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2},$$

joten tehtävän ratkaisemiseksi riittää osoittaa

$$\frac{27}{(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{R^2}$$

eli

$$a + b + c \leq 3\sqrt{3}R.$$

Jos kolmion kulmat ovat α, β ja γ, saadaan (yleistetyn) sinilauseen avulla kirjoitettua

$$a + b + c = 2R(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)).$$

Sinifunktio $\sin(x)$ on konkaavi kun $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ (toinen derivaatta on $-\sin(x)$), joten

$$2R(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)) \geq 2R \cdot 3 \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 2R \cdot 3\sin(60^\circ) = 3\sqrt{3}R,$$

mikä on haluttu väite.