Vuoden 2005 pohjoismaisen kilpailun ratkaisut

1. Määritä kaikki ne positiiviset kokonaisluvut k, joiden kymmenjärjestelmäesityksen numeroiden tulo on

$$\frac{25}{8}k - 211.$$

Vastaus. Kelpaavat luvut ovat $k = 72$ ja $k = 88$.

Ratkaisu. Ratkaisun ideana on osoittaa, että $25k/8 - 211$ on suurempi kuin numeroiden tulo kaikissa paitsi pienissä tapauksissa.

Todetaan ensiksi, että mikä tahansa luku on vähintään yhtä suuri kuin kymmenjärjestelmäesityksensä numeroiden tulo. Jos nimittäin k on n-numeroinen luku, jonka ensimmäinen numero on a, niin pätee $k \geq a \cdot 10^{n-1}$, ja toisaalta k:n numeroiden tulo on enintään $a \cdot 9^{n-1}$.

Täten millä tahansa ratkaisulla tulee päteä

$$\frac{25}{8}k - 211 \leq k,$$

mistä ratkaistaan $17k \leq 8 \cdot 211 = 1688$ ja siten

$$k < 100.$$

Toisaalta tulee päteä $25k/8 - 211 \geq 0$, mistä ratkaistaan $k > 64$.

Todetaan vielä, että k:n tulee olla jaollinen kahdeksalla. Ratkaisuehdokkaat ovat siten $k = 72, 80, 88$ ja 96. Näistä $k = 72$ ja $k = 88$ toimivat.

2. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Todista, että

$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq a + b + c.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on kertoa epäyhtälö auki ja käyttää (painotettua) aritmeettis-geometrista epäyhtälöä.

Kerrotaan epäyhtälö puolittain tulolla $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Saamme todistettavaksi ekvivalentin epäyhtälön

$$2a^2(a+b)(a+c) + 2b^2(b+a)(b+c) + 2c^2(c+a)(c+b) \geq (a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a).$$

Kerrotaan tämä auki. Auttaa huomata, että polynomit ovat symmetrisiä. Tulo $2a^2(a+b)(a+c)$ kerrottuna auki on $2a^4 + 2a^3b + 2a^3c + 2a^2bc$. Muut vasemman puolen termit antavat vastaavia termejä. Kirjoitetaan, että vasen puoli on

$$2\sum_{3\text{ kpl}} a^4 + 2\sum_{6\text{ kpl}} a^3b + 2\sum_{3\text{ kpl}} a^2bc,$$

missä esimerkiksi $\sum_{3\text{ kpl}} a^4$ tarkoittaa summaa $a^4 + b^4 + c^4$, ja summan alla oleva luku tarkoittaa kuinka monen symmetrisen lausekkeen yli summataan.

Kun oikea puoli kerrotaan auki, termin a^3b kerroin on 1, termin a^2b^2 kerroin on 2 ja termin a^2bc kerroin on 4, joten symmetriaan pohjautuen oikea puoli on

$$\sum_{6\text{ kpl}} a^3b + 2\sum_{3\text{ kpl}} a^2b^2 + 4\sum_{3\text{ kpl}} a^2bc.$$

Sieventelyn jälkeen halutaan siis todistaa

$$2\sum_{3\text{ kpl}} a^4 + \sum_{6\text{ kpl}} a^3b \geq 2\sum_{3\text{ kpl}} a^2b^2 + 2\sum_{3\text{ kpl}} a^2bc.$$

Todistetaan erikseen

$$2\sum_{3\text{ kpl}} a^4 \geq 2\sum_{3\text{ kpl}} a^2bc \quad \text{ja} \quad \sum_{6\text{ kpl}} a^3b \geq 2\sum_{3\text{ kpl}} a^2b^2.$$

Ensimmäinen seuraa aritmeettis-geometrisella epäyhtälöllä painottamalla muuttujia sopivasti: pätee

$$\frac{a^4 + a^4 + b^4 + c^4}{4} \geq \sqrt[4]{a^4 \cdot a^4 \cdot b^4 \cdot c^4} = a^2bc,$$

ja summaamalla tämän ja kaksi muuta symmetristä epäyhtälöä saadaan väite. Toinen epäyhtälö seuraa niin ikään aritmeettis-geometrisesta epäyhtälöstä summaamalla epäyhtälö

$$\frac{a^3b + ab^3}{2} \geq \sqrt{a^3b \cdot ab^3} = a^2b^2$$

ja sen symmetriset vastineet.

Kommentti. Ratkaisun ideat symmetristen polynomien käsittelystä, kompakti summanotaatio ja painotetun aritmeettis-geometrisen epäyhtälön käyttäminen ovat yleisesti hyödyllisiä epäyhtälötehtäviä ratkottaessa.

Tehtävään löytyy siistimpiäkin ratkaisuja. Voi esimerkiksi huomata, että kertomisen jälkeen epäyhtälön vasen puoli jakautuu tekijöihin:

$$\begin{aligned}&2a^2(a+b)(a+c) + 2b^2(b+a)(b+c) + 2c^2(c+a)(c+b)\\ =&2(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc),\end{aligned}$$

ja jakamalla sitten puolittain $a+b+c$:llä saadaan yksinkertaisempi epäyhtälö $2(a^3+b^3+c^3+abc) \geq (a+b)(b+c)(c+a)$. Tämän voi todistaa kertomalla auki ja painottamalla aritmeettis-geometrista epäyhtälöä sopivasti (kuten yllä).

3. 2005 nuorta istuu suuren pyöreän pöydän ympärillä. Nuorista enintään 668 on poikia. Sanomme, että tytön G asema on vahva, jos tarkasteltaessa G:stä alkaen kuinka monen hyvänsä vierekkäin istuvan nuoren joukkoa kumpaan tahansa suuntaan, niin näissä joukoissa on aina aidosti enemmmän tyttöjä kuin poikia (G on itse mukana laskussa). Osoita, että olivat tytöt ja pojat missä järjestyksessä tahansa, joku tyttö on aina vahvassa asemassa.

Ratkaisu. Ideana on tutkia ehtoa ensin vain toiseen suuntaan ja laskea, kuinka monta tyttöä toteuttaa tämän heikennetyn ehdon.

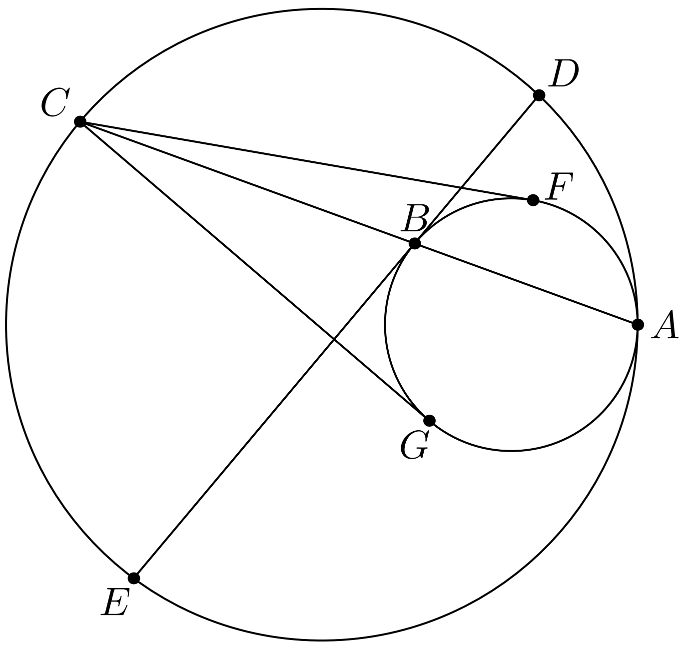
Olkoon t tyttöjen lukumäärä ja p poikien.

Sanotaan, että tytön G asema on *aika vahva myötäpäivään*, jos kiertäessä tytöstä myötäpäivään on tyttöjä aina enemmän kuin poikia (kun G itse lasketaan mukaan). Tyttö, jonka vasemmalla puolella on poika, ei ole aika vahvassa asemassa. Toisaalta pari, joka koostuu tytöstä ja tätä heti seuraavasta pojasta ei vaikuta siihen, ovatko muut tytöt aika vahvassa asemassa. Voimme siis poistaa kaikki tällaiset parit. Jäljelle jää ainakin $t - p$ tyttöä, joka ovat kaikki aika vahvassa asemassa myötäpäivään.

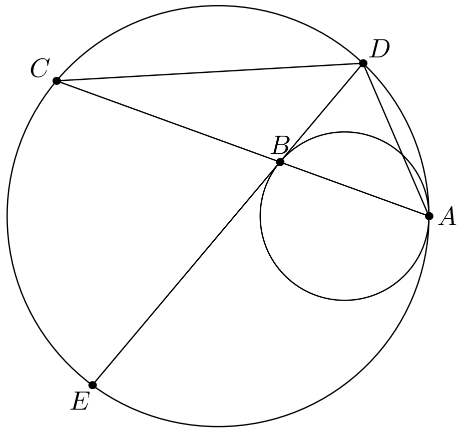
Samanlainen lasku vastapäivään osoittaa, että ainakin $t-p$ tyttöä on aika vahvassa asemassa vastapäivään. Tehtävän luvuilla pätee $t > 2p$ eli $2(t-p) > t$, joten ainakin yksi tyttö on aika vahvassa asemassa molempiin suuntiin eli siis vahvassa asemassa.

4. Ympyrä $\mathcal{C}_1$ on ympyrän $\mathcal{C}_2$ sisäpuolella, ja ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä A. A:n kautta kulkeva suora leikkaa $\mathcal{C}_1$:n myös pisteessä B ja $\mathcal{C}_2$:n myös pisteessä C. Ympyrän $\mathcal{C}_1$ pisteeseen B piirretty tangnetti leikkaa $\mathcal{C}_2$:n pisteissä D ja E. Pisteen C kautta kulkevat ympyrän $\mathcal{C}_1$ tangentit sivuavat $\mathcal{C}_1$:tä pisteissä F ja G. Osoita, että pisteet D, E, F ja G ovat samalla ympyrällä.

Ratkaisu. Idea on, että C on kyseisen ympyrän keskipiste.



Tutkitaan aluksi seuraavaa yksinkertaisempaa kuvaa.



On tunnettu tulos, että C on kaaren DE keskipiste. (Todistuksen idea: isompi ympyrä saadaan venyttämällä pientä ympyrää pisteen A suhteen, mistä seuraa että pisteisiin B ja C piirretyt ympyröiden tangentit ovat yhdensuuntaisia, mistä väite seuraa.)

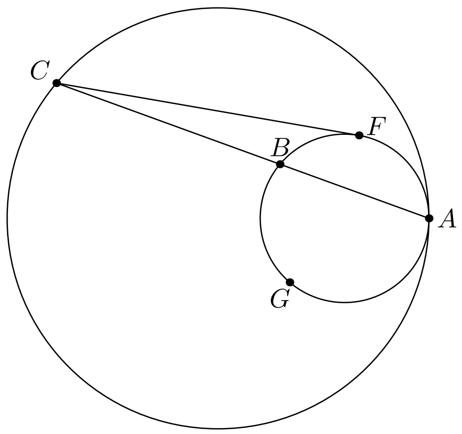
Tästä seuraa, että kolmiot CAD ja CDB ovat yhdenmuotoisia: niillä on yhteinen kulma C:ssä, ja $\angle CAD$ ja $\angle CDE$ vastaavat yhtä pitkiä ympyrän kaaria.

Yhdenmuotoisuuden nojalla $\frac{CA}{CD} = \frac{CD}{CB}$, eli

$$CD^2 = CA \cdot CB.$$

Toisaalta pisteen potenssilla C:n suhteen saadaan

$$CF^2 = CA \cdot CB.$$



Täten $CD = CF$. Lisäksi pätee $CD = CE$ (koska C on kaaren DE keskipiste) ja $CF = CG$ (koska tangentit ovat yhtä pitkiä). Siis C on yhtä kaukana pisteistä D, E, F ja G, mistä väite seuraa.