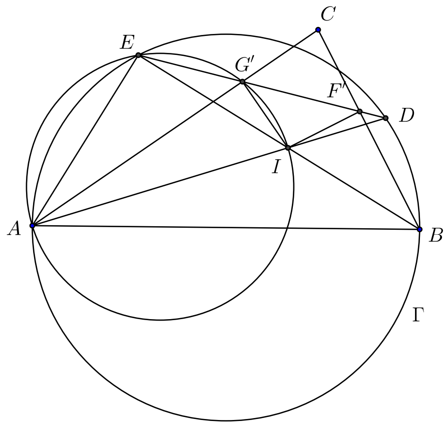
29. Pohjoismainen matematiikkakilpailu

Tiistai, 24. maaliskuuta 2015

Tehtävien ratkaisuja

1. *Olkoon ABC kolmio ja Γ ympyrä, jonka halkaisija on AB. Kulman $\angle BAC$ puolittaja leikkaa Γ:n (myös) pisteessä D kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa Γ:n (myös) pisteessä E. Kolmion ABC sisään piirretty ympyrä sivuaa BC:tä pisteessä F ja AC:tä pisteessä G. Osoita, että D, E, F ja G ovat samalla suoralla.*



1. ratkaisu. Suora ED leikkaa BC:n pisteessä F' ja AC:n pisteessä G'. Suorat AD ja BE leikkaavat toisensa kolmion ABC sisäympyrän keskipisteessä I. Pyritään osoittamaan, että $IG' \perp AC$ ja $IF' \perp BC$. Silloin G' ja F' ovat kolmion ABCn AC ja BC sivuamispisteet ja siis $G' = G$ sekä $F' = F$. Osoitetaan, että A, I, G' ja E ovat samalla ympyrällä. Tähän riittää, jos nähdään, että $\angle IAG' = \angle IEG'$. Mutta näin todella on, sillä AD on kulman $\angle CAB$ puolittaja, joten $\angle G'AI = \angle CAD = \angle DAB = \angle DEB = \angle G'EI$. Yhtälöketjun toiseksi viimeinen yhtäsuuruus perustuu kehäkulmalauseeseen sovellettuna ympyrään Γ. Koska AB on ympyrän Γ halkaisija, $\angle AEB$ on suora kulma. Mutta kun kehäkulmalausetta sovelletaan ympyrään $AIG'E$, nähdään, että $\angle AG'I = \angle AEI = \angle AEB$. Kulma $\angle AG'I$ on siis myös suora, joten $G' = G$. Aivan samoin nähdään, että $F' = F$. Koska G' ja F' ovat suoralla ED, ovat G ja F myös tällä suoralla, ja väite on todistettu.

2. ratkaisu. (Luetaan edellistä kuvaa niin, että F' ja G' ovat sivuamispisteet F ja G.) Koska kulmat $\angle AEI = \angle AEB$ ja $\angle AGI$ ovat suoria kulmia, $AIGE$ on jännenelikulmio. Siis $\angle BEG = \angle IEG = \angle IAG = \angle DAC = \angle DAB = \angle BED$. Mutta tämä merkitsee, että G ja D ovat samalla E:n kautta kulkevalla suoralla. Samoin osoitetaan, että F ja E ovat samalla D:n kautta kulkevalla suoralla. Siis G ja F ovat suoralla ED.

2. *Määritä alkuluvut p, q, r, kun tiedetään, että luvuista pqr ja $p + q + r$ toinen on 101 kertaa toinen.*

Ratkaisu. Olkoon luvuista p, q, r suurin m. Koska jokainen luvuista on ≥ 2, niin $p + q + r \leq 3m$ ja $pqr \geq 4m$. Kysyttyjen lukujen summa on siis aina pienempi kuin niiden tulo. Luvut toteuttavat siis yhtälön $pqr = 101(p+q+r)$. Luku 101 on alkuluku. luvuista p, q, r ainakin yhden on oltava 101. Oletetaan, että $r = 101$. Silloin $pq = p + q + 101$ eli $(p-1)(q-1) = 102$. Luku 102 voidaan jakaa tekijöihin seuraavilla tavoilla: $102 = 1 \cdot 102 = 2 \cdot 51 = 3 \cdot 34 = 6 \cdot 17$. Joukko $\{p,\, q\}$ voi siis olla $\{2,\, 103\}$, $\{3,\, 52\}$, $\{4,\, 35\}$, $\{7,\, 18\}$. Mutta ainoa vaihtoehto, jossa sekä p että q ovat alkulukuja, on $\{2,\, 103\}$ Tehtävän ainoa ratkaisu on $\{p,\, q,\, r\} = \{2,\, 101,\, 103\}$.

3. *Olkoon $n > 1$ ja olkoon $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ polynomi, jolla on n reaalista nollakohtaa (moninkertaiset nollakohdat laskettuina kertalukunsa ilmoittaman määrän kertoja). Määritellään polynomi q asettamalla*

$$q(x) = \prod_{j=1}^{2015} p(x+j).$$

Tiedetään, että $p(2015) = 2015$. Todista, että q:lla on ainakin 1970 eri nollakohtaa $r_1, \ldots, r_{1970}$, niin että $|r_j| < 2015$ kaikille $j = 1, \ldots, 1970$.

Ratkaisu. Merkitään $h_j(x) = p(x+j)$. Tarkastellaan polynomia h_{2015}. Sillä on samoin kuin p:llä n reaalista nollakohtaa $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Lisäksi $h_{2015}(0) = p(2015) = 2015$. Vietan kaavojen mukaan polynomin nollakohtien tulo on polynomin nollannen asteen termi tai sen vastaluku. Siis $|s_1 s_2 \cdots s_n| = 2015$. Koska $n \geq 2$, ainakin yhdelle s_j pätee $|s_j| \leq \sqrt{2015} < \sqrt{2025} = 45$. Merkitään tätä s_j:tä symbolilla m. Kaikilla $j = 0, 1, \ldots, 2014$ on $h_{2015-j}(m+j) = p(m+j+2015-j) = p(m+2015) = h_{2015}(m) = 0$. Siis luvut $m, m+1, \ldots, m+2014$ ovat kaikki polynomin q nollakohtia. Koska $0 \leq |m| < 45$, niin ehdon $|m+j| < 2015$ toteuttaa ainakin 1970 eri lukua j, $0 \leq j \leq 2014$, joten väite on todistettu.

4. *Tietosanakirjassa on 2000 numeroitua osaa. Osat on pinottu numerojärjestykseen niin, että osa numero 1 on päällimmäisenä ja osa numero 2000 pohjimmaisena. Pinolle voidaan tehdä kahdenlaisia toimenpiteitä:*

(i) Jos n on parillinen, voidaan ottaa n päällimmäistä osaa ja siirtää ne järjestystä muuttamatta pinon alimmaisiksi.

(ii) Jos n on pariton, voidaan ottaa pinon n päällimmäistä osaa, vaihtaa niiden järjestys päinvastaiseksi ja laittaa ne uudelleen pinon päällimmäisiksi.

Kuinka moneen eri järjestykseen pino voidaan saattaa toistamalla näitä kahta toimenpidettä?

1. ratkaisu. (Tehtävän ehdottajan ratkaisu.) Olkoot 1, 2, ..., 2000 osien paikat ylhäältä laskien. Tulkitaan numerointi modulo 2000. Huomataan, että molemmat tehtävän operaatiot säilyttävät parittomilla paikoilla olevat osat parittomilla paikoilla ja parillisilla paikoilla olevat osat parillisilla paikoilla. Operaatio (i) vähentää jokaisen osan paikan numerosta parillisen luvun. Jos A on tyypin (i) operaatio ja B tyypin (ii) operaatio, niin operaatio $A^{-1}BA$ muuttaa paikoissa $n+1$:stä $n+m$:ään olevien osien paikat käänteiseen järjestykseen; n on tässä parillinen ja m pariton luku. Sanomme, tallaista *välin kääntämiseksi*. Osoitetaan nyt, että parittomissa paikoissa olevat osat voidaan järjestää mihin tahansa järjestykseen. Jos osa, jonka haluamme paikalle 1 on paikassa m_1, käännetään väli 1:stä m_1:een. Jos osa, joka halutaan paikalle 3 on paikassa m_3, käännetään väli 3:sta m_3:een jne. Näin saadaan parittomissa paikoissa olevat osat mielivaltaiseen järjestykseen.

Osoitetaan sitten, että myös parillisissa paikoissa olevat osat voidaan järjestää mielivaltaiseen järjestykseen muuttamatta parittomissa paikoissa olevien osien paikkoja. Tätä varten riittää, että osoitetaan minkä tahansa kahden parillisissa paikoissa olevan osan olevan vaihdettavissa niin, että kaikkie muiden osien paikat pysyvät samoina. Paikoissa $2n$

ja $2n+2m$ olevat osat voidaan vaihtaa seuraavasti. Käännetään ensin väli $2n+1$:stä t $2n+2m-1$:een, sitten väli $2n+2m+1$:stä $2n-1$:ään, sitten väli $2n+1$:stä $2n-1$:een ja viimein lisätään $2m$ jokaisen osan paikkanumeroon.

Koska parittomissa paikoissa olevilla osilla on 1000! eri mahdollista järjestystä ja samoin parillisissa paikoissa olevilla osilla, niin osat voidaan kaikkiaan järjestää $(1000!)^2$ eri tavalla.

2. ratkaisu. (Ratkaisu 1 hiukan formalisoidummin ja monisanaisemmin.) Osoitetaan, että osat voidaan järjestää niin, että paritonnumeroiset osat ovat paritonnumeroisilla paikoilla mielivaltaisessa järjestyksessä ja parillisnumeroiset osat ovat parillisilla paikoilla mielivaltaisessa järjestyksessä. Olennainen idea on muodostaa tehtävässä annetuista operaatioista kaksi yhdistelmää. Toinen vaihtaa annetulla välillä, jonka molemmat päätepisteet ovat paritonnumeroisia, olevat osat käänteiseen järjestykseen, mutta jättää muut osat paikoilleen, tai jättää kaikki jollain välillä, jonka päätepisteet ovat parillisnumeroisia paikkoja, olevat osat paikoilleen, mutta kääntää tämän välin ulkopuolella olevat osat päinvastaiseen järjestykseen, kun numerointia jatketaan pohjalta niin, että se jatkuu päällimmäisestä paikasta. Toinen yhdistelmäoperaatio pelkästään vaihtaa kaksi parillisnumeroisissa paikoissa olevaa osaa keskenään, mutta pitää kaikki muut osat paikoillaan. – On selvää, että 2000 ei ole erikoisasemassa, vaan se voitaisiin korvata mielivaltaisella parillisella luvulla. Muotoillaan ratkaisu kuitenkin tehtävän tekstin mukaisesti.

Olkoon $E = \{1, 2, \ldots, 2000\}$. Tulkitaan parillisesta luvusta n ja parittomasta luvusta m riippuvat operaatiot (i) ja (ii) funktioina $f_n : E \to E$ ja $g_m : E \to E$, jotka määritellään seuraavasti: defined by

$$f_n(p) = \begin{cases} 2000 + p - n, & \text{kun } p \geq n, \\ p - n, & \text{kun } n < p \end{cases} \quad \text{ja} \quad g_m(p) = \begin{cases} m - p + 1, & \text{kun } p \leq m, \\ p, & \text{kun } m < p. \end{cases}$$

Nähdään heti, että f_n ja g_m kuvaavat parittomat luvut parittomille luvuille ja parilliset luvut parillisille luvuille. Osia ei siis voi järjestää niin, että paritonnumeroinen osa joutuisi parillisnumeroiselle paikalle tai parillisnumeroinen osa paritonnumeroiselle paikalle. Havainnosta $f([1, n]) = [2000 - (n+1), 2000]$ seuraa helposti $f_n^{-1} = f_{2000-n}$.

Olkoon nyt n parillinen ja m pariton ja $n+m < 2000$. Tarkastellaan yhdistettyä funktiota $f_n^{-1} \circ g_m \circ f_n$. Jos $n < n+p \leq n+m$, niin $f_n(n+p) = p \leq m$, $g_m(p) = m-p+1 < 2000-n$ ja $f_n^{-1}(m-p+1) = f_{2000-n}(m-p+1) = 2000+m-p+1-2000+n = n+m+1-p$. Koska $f_n([n+1, n+m]) = [1, m]$, f_n kuvaa luvut p, jotka ovat välin $[n+1, n+m]$ ulkopuolella, luvuille, jotka ovat välin $[1, m]$ ulkopuolella; g_m pitää nämä luvut paikallaan ja f_n^{-1} palauttaa $f_n(p)$ p:ksi. Olemme siis osoittaneet, että kaikilla välejä $[s, t] \subset E$ kohden, missä s ja t ovat parittomia, on olemassa funktio $h_{s,t}$, joka on yhdistetty f-tyyppisistä ja g-tyyppisistä funktiosta niin, että $h_{s,t}$ kääntää välin $[s, t]$ lukujen järjestyksen, mutta on tämän välin ulkopuolella identtinen funktio.

Funktiot $h_{s,t}$ tekevät mahdolliseksi järjestää paritonnumeroisilla paikoilla olevat osat mielivaltaisesti. Jos p_1:n pitäisi olla paikalla 1, sovelletaan (tarvittaessa) h_{1,p_1}:tä; jos p_2:n olisi oltava paikassa 3, mutta se on nyt paikassa x, $x \geq 3$, sovelletaan (tarvittaessa) $h_{3,x}$:ää. Näin jatkaen päästään saadaan paritonnumeroiset osat järjestetyiksi halutulla tavalla.

Jotta voitaisiin muodostaa toinen halutuista operaatioista, on määriteltävä edellä esitetty $h_{s,t}$ myös tapauksessa $t < s$. Tätä varten tarkastellaan funktiota $f_n^{-1} \circ g_m \circ f_n$, kun

$m+n > 2000$. f_n:n määritelmän mukaan $f_n(n+m-2000) = 2000+(n+m-2000)-n = m$, joten $f_n[n+m-2000+1,\, n] = [m+1,\, 2000]$ Tästä seuraa, että $f_n^{-1} \circ g_m \circ f_n$ pitää välin $[n+m-2000+1,\, n]$ (jonka päätepisteet ovat parillisia) luvut paikallaan. Koska g_m kääntää järjestyksen välillä $[1,\, m]$ ja $f_n^{-1} = f_{2000-n}$ kuvaa $[1,\, m]$:n välin $[n+m-2000+1,\, n]$ komplementille niin, että $f_{2000-1}(1) = n+1$, tämän komplementin lukujen järjestys kääntyy vastakkaiseksi halutulla tavalla. – On osoitettu, että kun s ja t ovat parittomia ja $t < s$, on olemassa f-typpisistä ja g-tyyppisistä funktioista yhdistetty funktio $h_{s,t}$, niin, että $h_{s,\,t}$ on identtinen funktio välillä $[t+1,\, s-1]$, mutta kääntää tämän välin ulkopuolella olevien lukujen järjestyksen päinvastaiseksi, kun laskeminen aloitetaan s:stä ja jatketaan luvun 2000 jälkeen luvusta 1, ts modulo 2000.

Osoitetaan nyt, että kaksi parillisnumeroisissa paikoissa olevaa lukua voidaan vaihtaa keskenään niin, että kaikki muut luvut, ja erityisesti siis paritonnumeroisilla paikoilla olevat luvut pysyvät paikoillaan. Olkoot pysyvät paikoillaan p ja q, $p < q$, parillisia. Tarkastellaan yhdistettyä funktiota $\phi_{p,q} = f_{2000+p-q} \circ h_{p+1,\,p-1} \circ h_{q+1,\,p-1} \circ h_{p+1,q-1}$. Sisimmäinen funktio $h_{p+1,q-1}$ kääntää välin $[p+1,\, q-1]$ lukujen järjestyksen, mutta pitää muut luvut paikoillaan, seuraava funktio $h_{q+1,\,p-1}$ pitää välin $[p,\, q]$ luvut paikoillaan, $h_{p+1,\,p-1}$ pitää p:n paikoillaan ja kääntää $(\mod 2000)$ joukon $E \setminus \{p\}$ lukujen järjestyksen, and $f_{2000+p-q}(p) = q$. Kaksi sisintä $\phi_{p,q}$:n osaa pitävät q:n paikoillaan, $h_{p+1,p-1}$ kuvaa q:n paikalle x, joka on $q-p$paikkaa p:n etupuolella $(\mod 2000)$ ja $f_{2000+p-q} = f_{q-p}^{-1}$ siirtää x:n $q-p$ askelta taaksepäin, siis paikkaan p. Jos $p+k$ on p:n ja q:n välissä, niin sisin funktio kuvaa sen $q-k$:ksi, seuraava funktio pitää $q-k$:n paikallaan, kolmas funktio kuvaa $q-k$:n paikkaan $p-(q-k-p) = 2p-q+k \pmod{2000}$ ja f_{q-p}^{-1} kuvaa $2p-q+k$:n takaisin $p+k$:ksi. Samanlainen päättely osoittaa, että $\phi_{p,q}$ pitää myös joukon $E \setminus [p,\, q]$ luvut paikoillaan.

Koska sekä parittomilla että parillisilla luvuilla on 1000! eri järjestystä, tietosanankirjan osat voidaan annetuilla operaatioilla saattaa $(1000!)^2$ eri järjestykseen.

3. ratkaisu. Osoitetaan induktiolla, että jos järjestetyssä jonossa voi vaihtaa kahden peräkkäisen alkion paikan, niin siinä voi vaihtaa kahden mielivaltaisen alkion paikan niin, että muut alkiot pysyvät paikoillaan. Jos vaihdettavat alkiot ovat peräkkäin, asia on selvä. Oletetaan, että väite pätee, aina kun vaihdettavien alkioiden etäisyys on k askelta. Jos a ja b ovat alkioita, joiden etäisyys on $k+1$ askelta (a ennen b:tä) ja c on a:sta seuraava alkio, niin induktio-oletuksen mukaan voidaan tehdä seuraavat vaihdot $\ldots,\, a,\, c,\, \ldots,\, b,\, \ldots \to \ldots,\, a,\, b,\, \ldots,\, c,\, \ldots \to \ldots,\, b,\, a,\, \ldots,\, c,\, \ldots \to \ldots,\, b,\, c,\, \ldots,\, a,\, \ldots$, missä kolmella pisteellä merkityissä paikoissa olevat alkiot pysyvät paikoillaan, samoin kuin c.

Jos mielivaltaiset kaksi jonon alkiota voidaan vaihtaa muita alkioita siirtämättä, jono voidaan saattaa mihin tahansa järjestykseen. Ensimmäiseksi haluttu alkio voidaan vaihtaa paikalleen. Jos k ensimmäistä on jo saatu paikoilleen, niin $k+1$:lle paikalle haluttava ei ole k:n ensimmäisen joukossa. Se voidaan siis vaihtaa paikalleen sekoittamatta jo paikoilleen asetettujen alkioiden järjestystä.

Osoitetaan nyt, että jokaiset peräkkäisissä parittomissa paikoissa olevat osat voidaan vaihtaa keskenään, niin että kaikki muut osat pysyvät paikoillaan. Pinon päällimmäisen ja kolmannen osan voi näin vaihtaa, soveltamalla operaatiota (ii) kolmeen päällimmäiseen osaan. Sijoilla $2n+1$ ja $2n+3$ olevat osat voi vaihtaa soveltamalla ensin operaatiota

(i) niin, että $2n$ päällimmäistä osaa siirtyvät järjestyksensä säilyttäen pinon alimmaisiksi, sitten soveltamalla operaatiota (ii) kolmeen päällimmäiseen osaan ja viimein soveltamalla operaatiota (i) $2000-2n$:ään päällimmäiseen osaan, jolloin pohjalla olleet $2n$ osaa palaavat alkuperäisille paikoilleen ja alun perin pohjalla olleet $2000-2n$ osaa palaavat muuten alkuperäisille paikoilleen, paitsi paikoilla $2n+1$ ja $2n+3$ olleet osat ovat vaihtaneet paikkaa. Edellä esitettyjen yleisten tulosten perusteella on nyt selvää, että kaikki paritonnumeroiset osat voidaan operaatiolla (i) ja (ii) saada mihin tahansa järjestykseen niin, että parillisnumeroiset osat pysyvät paikoillaan.

Osoitetaan vielä, että myös parillisnumeroiset osat voidaan samalla tavalla saada mihin tahansa järjestykseen. Paikoilla 2 ja 4 olevat osat voidaan vaihtaa tekemällä operaatio (ii) pinon viiteen ylimpään osaan. Silloin paikoilla 1 ja 5 olevat osat vaihtavat paikkaa, mutta edellä osoitetun perusteella ne saadaan palautettua paikoilleen operaatioita (i) ja (ii) yhdistelemällä. Peräkkäisillä paikoilla $2n$ ja $2n+2$ ($n > 1$) olevat osat voidaan vaihtaa tekemällä ensin operaatio (i) $2n-2$:een päällimmäiseen osaan. Silloin paikoilla $2n$ ja $2n+2$ olevat osat siirtyvät paikoille 2 ja 4, ja ne voidaan vaihtaa muuttamatta muiden osien paikkaa. Operaatio (i) sovellettuna $2000-(2n-2)$:een päällimmäiseen osaan palauttaa kaikki osat alkuperäisille paikoilleen, lukuun ottamatta paikoilla $2n$ ja $2n+2$lleita osia, jotka ovat vaihtaneet paikkaa. Kaikki parillisnumeroisilla paikoilla olevat osat voidaan siis saada operaatioilla (i) ja (ii) mielivaltaiseen järjestykseen, puuttumatta parittomilla paikoilla oleviin osiin.

Eri järjestyksiä on siis yhteensä $(1000!)^2$.