

11. pohjoismainen kilpailu 9. 4. 1997

1. Jos A on joukko, jonka alkiot ovat seitsemän positiivista lukua, niin kuinka monta A :n alkioista muodostuvaa kolmikkoa (x, y, z) , missä $x < y$ ja $x + y = z$, on enintään olemassa?
2. Olkoon $ABCD$ kupera nelikulmio. Oletetaan, että nelikulmion sisällä on piste P , jolle kolmioiden ABP , BCP , CDP ja DAP alat ovat samat. Osoita, että nelikulmion lävistäjistä ainakin toinen jakaa toisen kahteen yhtä pitkään osaan.
3. Olkoot A, B, C ja D neljä eri pistettä tasossa. Janoista AB, AC, AD, BC, BD ja CD kolmen pituus on a . Muiden kolmen pituus on b , missä $b > a$. Määritä osamäärän $\frac{b}{a}$ kaikki mahdolliset arvot.
4. Olkoon f ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa $\{0, 1, 2, \dots\}$ määritelty funktio, jolle pätee

$$f(2x) = 2f(x), \quad f(4x + 1) = 4f(x) + 3 \quad \text{ja} \quad f(4x - 1) = 2f(2x - 1) - 1.$$

Osoita, että f on injektio, ts. että jos $f(x) = f(y)$, niin $x = y$.