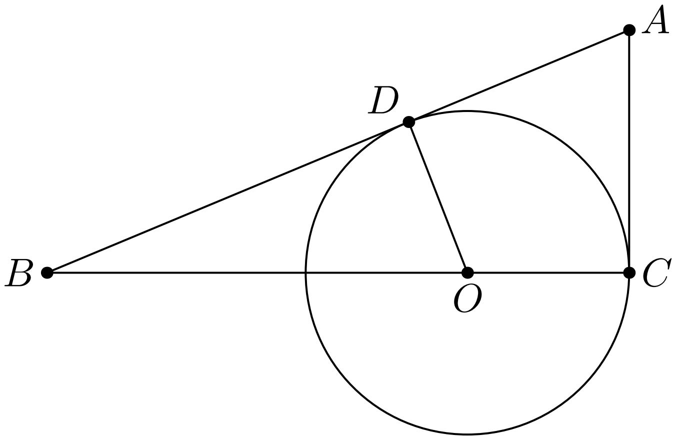
Lukion matematiikkakilpailun avoimen ratkaisuja 2009

Tehtävä 1. Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 10 ja 24. Suuremmalla kateetilla oleva piste keskipisteenä piirretään ympyräviiva, joka sivuaa toista kateettia ja hypotenuusaa. Laske ympyrän säde.

A1.



Olkoon suorakulmaisessa kolmiossa ABC C suoran kulman kärki ja $AC = 10$, $BC = 24$. Silloin $AB^2 = 4 \cdot (5^2 + 12^2) = 4 \cdot 169 = 26^2$, joten $AB = 26$. Olkoon O sivun BC piste ja sivutkoon r-säteinen O-keskinen ympyrä Γ AC:tä ja AB:tä. Koska $BC \perp AC$, Γ sivuaa AC:tä pisteessä C. Olkoon D Γ:n ja AB:n yhteinen piste. Silloin $OD \perp AB$. Tangenttien leikkauspisteen ja sivuamispisteiden väliset janat ovat yhtä pitkät, joten $AD = AC = 10$. Siis $BD = 26 - 10 = 16$. Suorakulmaiset kolmiot ABC ja BOD ovat yhdenmuotoiset. Siis $\frac{r}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$ ja $r = \frac{16 \cdot 5}{12} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Tehtävä 2. Kolmion sivujen pituuden muodostavat geometrisen jonon, jonka suhde on q. Osoita, että $\sqrt{5} - 1 < 2q < \sqrt{5} + 1$.

A2. Kolmion sivut ovat a, qa ja qa^2. Oletetaan ensin, että $q \geq 1$. Kolmion pisin sivu on lyhyempi kuin kahden muun summa. Siis $aq^2 < a + aq$ eli $q^2 - q - 1 < 0$. Epäyhtälö on yhtälö, kun $q = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, joten (yhdistettynä tietoon $q \geq 1$) epäyhtälö on voimassa vain kun $1 \leq q < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Siis $2 \leq 2q < 1 + \sqrt{5}$. Oletetaan sitten, että $0 < q < 1$. Nyt a on kolmion pisin sivu, joten $a < aq + aq^2$ eli $q^2 + q - 1 > 0$. Epäyhtälössä on yhtälö, kun $q = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, joten (yhdistettynä tietoon $q < 1$) epäyhtälö on voimassa vain kun $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) < q < 1$ eli $-1 + \sqrt{5} < 2q < 2$. Luku q toteuttaa siis tehtävässä ilmoitetun kaksoisepäyhtälön.

Tehtävä 3. Määritä kaikki tavat lausua 2009 kahden positiivisen kokonaisluvun kuutioiden (eli kolmansien potenssien) erotuksena.

A3. Ratkaistaan siis yhtälö $2009 = x^3 - y^3$ positiivisten kokonaislukujen joukossa. Koska $2009 = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ ja $2009 = 7 \cdot 287 = 7^2 \cdot 41$, kokonaislukujen x ja y on toteutettava $x > y$ ja jokin yhtälöpareista

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 2009 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 287 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 41, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$$

Ensimmäinen pari johtaa yhtälöön $x^2+x(x-1)+(x-1)^2 = 2009$ eli $3x^2-3x = 2008$. Koska 2008 ei ole jaollinen kolmella, yhtälö ei toteudu millään kokonaisluvulla x. Vastaavasti toinen yhtälöpari johtaa yhtlöön $x^2 + x(x-7) + (x-7)^2 = 287$ eli $3x^2 - 21x + 49 = 7 \cdot 41$. Siis x^2 on jaollinen 7:llä. Mutta silloin x^2 on jaollinen 49:llä samoin kuin $21x$:kin, eli yhtälön vasen puoli on jaollinen 49:llä. Yhtälön oikea puoli ei kuitenkaan ole jaollinen 49:llä, joten yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua. (Vaihtoehtoisesti voidaan vain ratkaista syntynyt toisen asteen yhtälö ja todeta, että ratkaisut eivät ole kokonaislukuja.) Jos viimeisellä yhtälöparilla olisi ratkaisu, jossa x on positiivinen kokonaisluku, niin $x \geq 41$ ja $x^2 + xy + y^2 \geq 41^2 > 49$. Ratkaisua ei siis ole. Tehtävässä kysyttyjä tapoja kirjoittaa luku 2009 ei siis ole olemassa.

Tehtävä 4. Osoita, että 10 suomalaista voi soittaa 10 ruotsalaiselle 30 puhelua niin, että

1) kukaan ei soita kellekään kahdesti ja

2) mitkään kaksi suomalaista eivät soita keillekään kahdelle ruotsalaiselle kaikkia mahdollista neljää puhelua

A4. Riittää, että kuvailee jonkin tavan järjestää soitot niin, että tehtävän ehto toteutuu. Olkoot suomalaiset $S_0, S_1, \ldots, S_9$ ja ruotsalaiset $R_0, R_1, \ldots, R_9$. Soittakoon suomalainen S_i ruotsalaisille R_i, R_{i+1} ja R_{i+3}, missä indeksit luetaan modulo 10 (eli R_{10} on sama kuin R_0, R_{11} on sama kuin R_1 ja niin edelleen). Puheluja on $3 \cdot 10 = 30$, eikä kukaan suomalainen soita kellekään ruotsalaiselle kahdesti, joten ehto 1) täyttyy. Ehdon 2) voimassaolon todistamista varten tarkastellaan kaaviota, johon on merkitty kaikki puhelut:

	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
S_0	×	×		×						
S_1		×	×		×					
S_2			×	×		×				
S_3				×	×		×			
S_4					×	×		×		
S_5						×	×		×	
S_6							×	×		×
S_7	×							×	×	
S_8		×							×	×
S_9	×		×							×

Jos jotkin kaksi suomalaista S_i ja S_k soittaisivat kahdelle ruotsalaiselle R_m ja R_n kaikki neljä mahdollista puhelua, kaaviossa olisi rivien i ja k sekä sarakkeiden m ja n määrittämän suorakaiteen kaikissa kärjissä raksi $\times$. Kaaviota riveittäin tarkastamalla näkee kuitenkin, että siinä ei ole yhtään sellaista suoraakaidetta, jonka kaikissa kärjissä olisi $\times$. Täten myös ehto 2) toteutuu.