Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2009

Tehtävä 1. Marjoja myytiin rasioissa, jotka oli hinnoiteltu marjatyypin mukaan. 2 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 1 rasia mustikoita maksoi yhteensä 8 euroa, 1 rasia vadelmia, 3 rasiaa herukoita ja 1 rasia mustikoita maksoi 7,5 euroa ja annos, jossa oli 2 rasiaa vadelmia ja 3 rasiaa mustikoita, maksoi 7 euroa. Kuinka paljon maksoi yhteensä 3 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 3 rasiaa mustikoita?

P1. Olkoot v, h ja m vadelmien, herukoiden ja mustikoiden rasiahinnat euroina. Tehtävät ehdot voidaan kirjoitaa yhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} 2v + 2h & +m = 8 \\ v \ + 3h & +m = 7{,}5 \\ 2v & +3m = 7. \end{cases}$$

Kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $5(v+h+m) = 22{,}5$ eli $v+h+m = 4{,}5$. Tästä ja toisesta yhtälöstä saadaan $2h = 7{,}5 - (h + v + m) = 7{,}5 - 4{,}5 = 3$, joten $h = 1{,}5$. Toisesta yhtälöstä saadaan nyt $3v + 2h + 3m = 3(v + h + m) - h = 3 \cdot 4{,}5 - 1{,}5 = 12$. Siis 3 rasiaa vadelmia, 2 rasiaa herukoita ja 3 rasiaa mustikoita maksaa yhteensä 12 euroa.

(Yhtälöryhmästä voi myös ensiksi laskea luvut v, h ja m ja sen jälkeen laskea, mitä on $3v + 2h + 3m$.)

Tehtävä 2. Täydennä alla olvea ruudukko niin, että siinä esiintyvät kaikki luvut $1, 2, \ldots, 16$ ja jokaisen vaaka- ja pystyrivin lukujen summa on sama. Etsi kaikki eri tavat täydentää ruudukko:

4			
9			8
7	2	10	

P2. Ruudukon lukujen summa on

$$1 + 2 + \cdots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 8 \cdot 17 = 4 \cdot 34,$$

joten kunkin vaakarivin lukujen summa on 34. Vasemman sarakkeen alimpaan ruutuun tulee siis luku 14 ja kolmannen rivin neljänteen ruutuun 15.

4			
9			8
7	2	10	15
14			

Oikeanpuoleisen sarakkeen kahden tyhjän ruudun lukujen summa on 11. Lukuparit, joiden osien summa on 11, ovat $(1,10), (2,9), (3,8), (4,7)$ ja $(5,6)$. Kaikkien muiden paitsi viimeisen parin luvuista ainakin toinen on jo käytetty. Jää siis selvitettäväksi kaksi mahdollisuutta: 5 on oikean sarakkeen ylin ja 6 alin luku tai 6 ylin ja 5 alin. Tutkitaan nämä kaksi tapausta erikseen.

Tapaus 1: 5 on ruudukon oikeassa yläkulmassa.

4			5
9			8
7	2	10	15
14			6

Tällöin ylimmän rivin keskimmäisten lukujen summa on 25, ja luvut löytyvät pareista $(9,16)$, $(10,15)$, $(11,14)$ tai $(12,13)$. Jälleen vain luettelon viimeinen pari on mahdollinen. Luku 16 ei voi olla alimmassa rivissä, koska $14+16+6>34$. 16 on siis toisessa rivissä. 16 ei voi olla kolmannessa sarakkeessa, koska $12+16+10>34$. Luku 16 on siis toisen rivin toisessa ruudussa. Silloin 1 on saman rivin kolmannessa ruudussa, joten alarivissä keskimmäisissä ruuduissa ovat 2 ja 11. 12 ei voi olla ylärivin toisessa ruudussa, koska tällöin toisen sarakkeen lukujen summa olisi pariton. Ylärivissä on siis oltava järjestyksessä luvut $4, 13, 12$ ja 5, ja kun alarivi on $14, 3, 11, 6$, tehtävän ehto täyttyy. Yksi mahdollinen järjestys on siis

4	13	12	5
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	11	6

Tapaus 2: Ruudukon oikeassa yläkulmassa on 6 ja oikeassa alakulmassa 5. Samoin kuin edellä päätellään, että ylärivin kesikimmäisissä ruuduissa on oltava 13 ja 11, että

luvun 16 on oltava toisen rivin toisessa ruudussa ja luvun 1 toisen rivin kolmannessa ruudussa, että luvun 12 on oltava alarivin kolmannessa ruudussa; tämän jälkeen lukujen $11, 13$ ja 3 paikat määräytyvät, ja ruudukko on

4	13	11	6
9	16	1	8
7	2	10	15
14	3	12	5

Tehtävä 3. Neliöpohjaisen laatikon pohjalle sijoitetaan kaksi ympyränmuotoista kiekkoa. Kiekkojen säde on r. Mikä on pienin mahdollinen laatikon sivu a?

P3. Kiekot voidaan aina asettaa kiinni toisiinsa. Voidaan siis rajoittua tutkimaan tapausta, jossa kiekot sivuavat toisiaan. Jos kiekkojen keskipisteiä yhdistävä suora muodostaa kulman α toisen neliön sivun, sanokaamme vaakasivun kanssa, niin pystysivujen etäisyyden on oltava ainakin $r + 2r\cos\alpha + r = 2r(1+\cos\alpha)$ ja vaakasivujen etäisyyden on oltava ainakin $r + 2r\sin\alpha + r = 2r(1+\sin\alpha)$. Laatikon sivun on oltava vähintään yhtä suuri kuin suurempi luvuista $2r(1+\cos\alpha), 2r(1+\sin\alpha)$. Kun $\alpha = 45°$, molemmat luvut ovat $2r\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Kun $\alpha < 45°$, niin $\cos\alpha > \cos 45°$ ja kun $\alpha > 45°$, niin $\sin\alpha > \sin 45°$. Etäisyyksistä suurempi on siis pienin mahdollinen, kun $\alpha = 45°$, joten pienin mahdollinen a on $2r\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r(2+\sqrt{2})$.

Tehtävä 4. Määritä kaikki tavat lausua 2009 kahden positiivisen kokonaisluvun neliöiden (eli toisten potenssien) erotuksena.

P4. Etsitään positiivisia kokonaislukuja x ja y, joille $2009 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Lukujen $x+y$ ja $x-y$ on oltava luvun 2009 tekijöitä. Mutta $2009 = 7 \cdot 287 = 7^2 \cdot 41$, ja koska $x + y > x - y$, on x:n ja y:n toteutettava jokin seuraavista yhtälöpareista:

$$\begin{cases} x+y = 2009, \\ x-y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 287, \\ x-y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 49, \\ x-y = 41. \end{cases}$$

Yhtälöparien ratkaisuiksi saadaan helposti $(x, y) = (1005, 1004), (147, 140)$ ja $(45, 4)$.