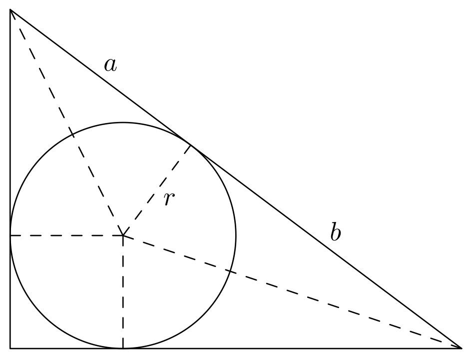
Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2010

Ratkaisu 1. Väite: Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä jakaa hypotenuusan osiin a ja b. Tällöin kolmion ala on ab.

Todistus: Merkitään kolmion sisäänpiirretyn ympyrän sädettä r:llä. Sisäänpiirretyn ympyrän sivujen vastaiset säteet ja terävien kulmien kulmanpuolittajat jakavat kolmion viiteen osaan: yhteen neliöön, jonka sivu on r, kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat a ja r (näillä on yhteinen hypotenuusa ja kateetti r) sekä kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat b ja r.



Siis alkuperäisen kolmion ala on

$$A = r^2 + 2 \cdot \frac{ar}{2} + 2 \cdot \frac{br}{2} = r^2 + ar + br.$$

Ala voidaan myös laskea toisin, sillä kolmion kateetit ovat $a + r$ ja $b + r$, josta

$$A = \frac{1}{2}(a + r)(b + r) = \frac{1}{2}(r^2 + ar + br + ab).$$

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan eliminoitua tuntematon r:

$$A = 2A - A = r^2 + ar + br + ab - (r^2 + ar + br) = ab.$$

Huomautus: Jatkamalla tästä saadaan helposti todistus Pythagoraan lauseelle:

$$\begin{aligned}
&(a + r)^2 + (b + r)^2 \\
&= a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2br + r^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2(r^2 + ar + br) \\
&= a^2 + b^2 + 2A = a^2 + b^2 + 2ab \\
&= (a + b)^2.
\end{aligned}$$

Kääntäen tehtävän väitteen voi todistaa käyttämällä Pythagoraan lausetta ensimmäisen alan kaavan sijasta.

Ratkaisu 2. Tehtävän ehdosta saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
&\frac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+4^{-1}}{4}=\frac{5}{16}\\
&\Leftrightarrow a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\\
&\Leftrightarrow a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=1.
\end{aligned}$$

Koska $0<a<b<c$, niin $1=a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}<a^{-1}+a^{-1}+a^{-1}=3a^{-1}$, joten $a<3$. Toisaalta $1=a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}>a^{-1}$, joten $a>1$. Ainoa kokonainen ratkaisu on $a=2$. Jäljelle jääville tuntemattomille saadaan yhtälö

$$2^{-1}+b^{-1}+c^{-1}\Leftrightarrow b^{-1}+c^{-1}=\frac{1}{2}.$$

Koska $2<b<c$, niin $\frac{1}{2}=b^{-1}+c^{-1}<2b^{-1}$, joten saadaan $b<4$. Ainoa kokonainen mahdollisuus on $b=3$ ja luvun c ratkaisemiseksi saadaan yhtälö

$$3^{-1}+c^{-1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow c^{-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=\Leftrightarrow c=6.$$

Siis $a=2,b=3$ *ja* $c=6$.

Ratkaisu 3. Koska $\sin x,\sin 2x$ ja $\sin 4x$ muodostavat aritmeettisen jonon, niin kaksinkertaisen kulman sinin ja kosinin kaavoja toistuvasti käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
&\sin 4x-\sin 2x=\sin 2x-\sin x\\
&\Leftrightarrow \sin 4x-2\sin 2x=-\sin x\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x-2\sin 2x=-\sin x\\
&\Leftrightarrow 2\sin 2x(\cos 2x-1)=-\sin x\\
&\Leftrightarrow 4\sin x\cos x(\cos 2x-1)=-\sin x\\
&\Leftrightarrow \cos x(\cos 2x-1)=-\frac{1}{4}\quad(\sin x\neq 0,\ \text{koska } x \text{ on terävä})\\
&\Leftrightarrow \cos x(2\cos^2 x-2)=-\frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow \cos^3 x-\cos x=-\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Ratkaisu 4. Ratsun pitää siis siirtyä mahdollisimman vähillä siirroilla origosta $(0,0)$ ruutuun (x,y), jolle $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{281}$ eli yksinkertaisemmin $x^2+y^2=281$. Koska

$$\frac{\sqrt{281}}{\sqrt{5}}=\sqrt{56{,}2}>\sqrt{49}=7,$$

tarvitaan enemmän kuin 7 siirtoa, jotta ratsu voi mitenkään päästä näin kauas origosta. Toisaalta luvun 281 parittomuudesta seuraa, että toinen koordinaateista x ja y on pariton, toinen parillinen. Ratsun siirroilla nykyisen pisteen koordinaattien summan parillisuus vaihtuu parillisesta parittomaksi tai toisin päin jokaisella askeleella. Siksi origosta etäisyydelle $\sqrt{281}$ tarvitaan pariton määrä siirtoja eli vähintään 9.

Osoitetaan sitten, että 9 siirtoa riittää. Koska $16^2 + 5^2 = 281$, piste $(x, y) = (16, 5)$ on etäisyydellä $\sqrt{281}$ origosta. Sinne pääsee reittiä

$$(0,0) \to (2,1) \to (4,2) \to (6,3) \to (8,4) \to (10,5) \to (12,6) \to \\ (14,5) \to (15,7) \to (16,5)$$

pitkin. Siis *yhdeksällä ratsun siirrolla pääsee origosta ruutuun, joka on etäisyydellä* $\sqrt{281}$ *lähtöruudusta.*