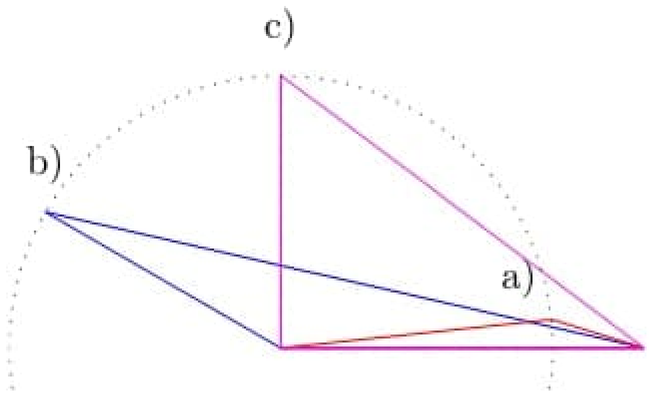
Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2010

	a	b	c	d
1.	$+$	$+$	$+$	$-$
2.	$+$	$+$	$+$	$+$
3.	$-$	$-$	$-$	$-$
4.	$-$	$-$	$-$	$+$
5.	$-$	$+$	$+$	$+$
6.	$+$	$+$	$-$	$-$

P1. Valitaan kannaksi sivu, jonka pituus on 4. Koska toinen jäljelle jäävistä sivuista on pituudeltaan 3 ja toista ei tunneta, korkeudelle pätee $0 < h \leq 3$ ja kaikki nämä arvot ovat mahdollisia. Siis $0 < A = 4h/2 = 2h \leq 6$ ja ala saa eri tilanteissa kaikki nämä arvot. Kohdat a, b ja c ovat siis oikein ja d väärin, vastaavat esimerkit ovat kuvassa.



P2. $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x^3+x^2+x+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1) = (x+1)(x^3-x^2+x-1)$, joten kaikki kohdat ovat oikein.

P3. Lieriön tilavuus on $\pi r^2 h = 1$ ja kokonaispinta-ala $2\pi r^2 + 2\pi rh = 12$, joten

$$\frac{12}{1} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi rh}{\pi r^2 h} = \frac{2}{h} + \frac{2}{r},$$

mistä seuraa $1/r + 1/h = 6$. Siis mikään vaihtoehdoista ei ole oikein.

P4. Luku $2010 \cdot 2 = 4020$ ei ole kokonaisluvun neliö, sillä $63^2 = 3969 < 4020 < 64^2 = 4096$. Jos p on pariton kokonaisluku, niin $2010p = 2 \cdot 1005 \cdot p$ on parillinen, mutta ei jaollinen neljällä, koska $1005p$ on pariton. Siis 2010 ei silloinkaan ole kokonaisluvun neliö. Kohta d on siis oikein.

P5. Paritonta astetta olevalla polynomiyhtälöllä tunnetusti on ratkaisuja, joten a on väärin. Muiut kohdat ovat mahdollisia, esimerkiksi yhtälöllä $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ on yksi, yhtälöllä $x^3 - x^2 = 0$ eli $x^2(x-1) = 0$ on kaksi ($x = 0$ ja $x = 1$) ja yhtälöllä $x^3 - x = 0$ eli $(x-1)x(x+1) = 0$ on kolme ($x = -1, x = 0$ ja $x = 1$) ratkaisua.

P6. Merkitään $s = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{xyz}{|xyz|}$. Huomataan, että

$$\frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{jos } t > 0 \\ -1 & \text{jos } t < 0 \end{cases}.$$

Siis lausekkeen

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|}$$

arvo voi olla $-3, -1, 1$ tai 3 sen mukaan, mitä lukujen x, y ja z etumerkit ovat. Toisaalta

$$\frac{xyz}{|xyz|} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|} \cdot \frac{z}{|z|}.$$

Jos siis $x, y, z > 0$, niin $s = 1 + 1 + 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$, jos $x, y, z < 0$, niin $s = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$. Jos täsmälleen kaksi luvuista x, y ja z on positiivisia, niin $s = 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 0$. Jos täsmälleen yksi on positiivinen, niin samoin $s = -1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0$. Siis mahdollisia arvoja on kolme, joten kohdat a ja b ovat oikein, c ja d väärin.

P7. Olkoot särmien pituudet a, b ja c. Suorakulmaisessa särmiössä tahkojen pinta-alat ovat tällöin ab, ac ja bc ja tilavuus $V = abc$. Siis

$$V^2 = (abc)^2 = (ab)(ac)(bc) = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576 = 24^2,$$

joten $V = 24$.

P8. Olkoon nelinumeroinen luku $1000a + 100b + 10c + d$, jossa a, b, c ja d ovat numeroita. Tiedetään, että

$$\begin{cases} a + b + c + d = 16 \\ c = a + b \\ b = 2d \\ (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) = 729. \end{cases}$$

Kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$16 = a + b + c + d = a + 2d + (a + 2d) + d = 2a + 5d.$$

Erityisesti $5d \leq 16$, joten $d \leq 3$. Kuitenkin jos d on pariton, myös $2a + 5d$ on, mutta numeroiden summa 16 on parillinen. Siis $d = 0$ tai $d = 2$. Edellisessä tapauksessa saadaan $a = \frac{1}{2}(16 - 5d) = 8, b = 2d = 0, c = a + b = 8 + 0 = 8$ ja $d = 0$, mutta $8080 - 0808 = 7272 \neq 729$, joten neljäs ehto ei toteudu. Jälkimmäisessä tapauksessa $a = \frac{1}{2}(16 - 5d) = \frac{16-10}{2} = 3$, $b = 2d = 4$, $c = a + b = 7$ ja $d = 2$. Koska $3472 - 2743 = 729$, viimeinen ehto toteutuu. Siis alkuperäinen luku on 3472.

Huomautus: Neljän toisistaan riippumattoman lineaarisen yhtälön ryhmän voi ratkaista myös tavanomaisin menetelmin käyttämättä epäyhtälöitä tai oletusta tuntemattomien kokonaisuudesta.