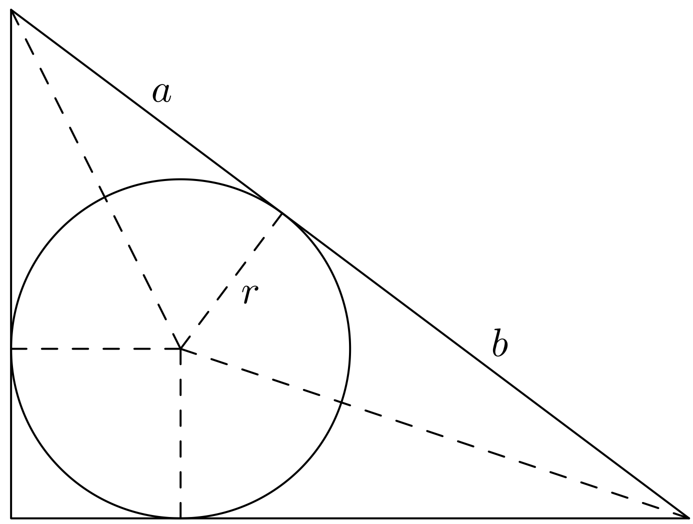
Lukion matematiikkakilpailun välisarjan ratkaisuja 2010

Ratkaisu 1. Matti maalasi aitaa klo 12:00:sta klo 14:25:een lukuun ottamatta 10 min keskeytystä, siis 2h 15min. Koska $\frac{\text{2h 15min}}{\text{3h}} = \frac{135}{180} = \frac{3}{4}$, niin Matti teki työstä osuuden 3/4 ja Kerkko osuuden 1/4. Siis Kerkon työskentelyaika oli $\frac{1}{4} \cdot 4\text{h} = 1\text{h}$ ja *kina alkoi klo 13:00.*

Ratkaisu 2. Väite: Suorakulmaisen kolmion sisään piirretty ympyrä jakaa hypotenuusan osiin a ja b. Tällöin kolmion ala on ab.

Todistus: Merkitään kolmion sisäänpiirretyn ympyrän sädettä r:llä. Sisäänpiirretyn ympyrän sivujen vastaiset säteet ja terävien kulmien kulmanpuolittajat jakavat kolmion viiteen osaan: yhteen neliöön, jonka sivu on r, kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat a ja r (näillä on yhteinen hypotenuusa ja kateetti r) sekä kahteen suorakulmaiseen kolmioon, joiden kateetit ovat b ja r.



Siis alkuperäisen kolmion ala on

$$A = r^2 + 2 \cdot \frac{ar}{2} + 2 \cdot \frac{br}{2} = r^2 + ar + br.$$

Ala voidaan myös laskea toisin, sillä kolmion kateetit ovat $a + r$ ja $b + r$, josta

$$A = \frac{1}{2}(a + r)(b + r) = \frac{1}{2}(r^2 + ar + br + ab).$$

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan eliminoitua tuntematon r:

$$A = 2A - A = r^2 + ar + br + ab - (r^2 + ar + br) = ab.$$

Huomautus: Jatkamalla tästä saadaan helposti todistus Pythagoraan lauseelle:

$$\begin{aligned}(a + r)^2 + (b + r)^2 &= a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2br + r^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(r^2 + ar + br) \\ &= a^2 + b^2 + 2A = a^2 + b^2 + 2ab \\ &= (a + b)^2.\end{aligned}$$

Kääntäen tehtävän väitteen voi todistaa käyttämällä Pythagoraan lausetta ensimmäisen alan kaavan sijasta.

Ratkaisu 3. Koska $2 + 6 + 6 + 4 = 18 = 2 \cdot 9$ on jaollinen yhdeksällä, myös 2664 on. Kehitetään alkutekijähajotelma:

$$2664 = 9 \cdot 296 = 9 \cdot 8 \cdot 37 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 37.$$

Tässä 37 on alkuluku, sillä $2 \nmid 37, 3 \nmid 37, 5 \nmid 37$ ja $7^2 = 49 > 37$. Jos $2664n$ on kokonaisluvun neliö, niin sen alkutekijähajotelmassa kaikkien alkulukujen eksponentit ovat parillisia. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että luvun n alkutekijähajotelmassa alkulukujen eksponentit ovat parillisia, paitsi että lukujen 2 ja 37 eksponentit ovat parittomia. Koska pienimmät eksponentit ovat 0 ja 1, *pienin n, jolla tämän saa toteutettua on* $n = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 37^1 = 2 \cdot 37 = 74$.

Ratkaisu 4. Ajatus on, että lukujonon ensimmäiset termit eivät voi olla kovin suuria, jos kymmenes luku on "vain" 322. Tätä kautta saadaan määritettyä jonon ensimmäiset ja siten loputkin termit.

Merkitään jonon n:ttä jäsentä a_n:llä. Tiedetään, että $a_{10} = 322$ ja $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ kaikilla n. Jos merkitään $a_1 = x$ ja $a_2 = y$, niin

$$a_3 = x + y, \quad a_4 = x + 2y, \quad a_5 = 2x + 3y, \quad a_6 = 3x + 5y, \quad a_7 = 5x + 8y,$$

$$a_8 = 8x + 13y, \quad a_9 = 13x + 21y, \quad a_{10} = 21x + 34y.$$

Täten $21x + 34y = 322$. Tiedämme, että jonon jäsenet ovat positiivisia kokonaislukuja, eli x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. Täten huomataan, että y:n tulee olla alle 10, koska muuten $21x + 34y$ olisi suurempi kuin 322. Käymällä yhdeksän mahdollista y:n arvoa läpi huomataan, että vain tapauksessa $y = 7$ saadaan luvun x arvoksi kokonaisluku. Tässä tapauksessa $x = 4$. Tällöin

$$a_5 = 2x + 3y = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 29,$$

eli *jonon viides jäsen on* 29.