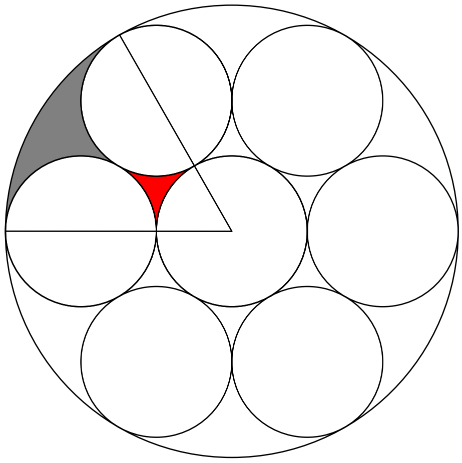
Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2011

A1. Pienten ympyröiden säde on 2. Tutkitaan kuvaan merkittyä sektoria. Tämän sektorin ala on toisaalta kuudesosa ympyrän pinta-alasta eli 6π.



Toisaalta sektorin sisällä on 7/6 pientä ympyrää, kuvan varjostettu osa (harmaalla) ja kolmen pienen ympyrän väliin jäämä alue (punaisella). Tämä punaisen alueen ala on 4-sivuisen tasakylkisen kolmion ala $4\sqrt{3}$ miinus puoli 2-säteisen ympyrän alaa.

Täten jos harmaan alueen ala on A, saadaan näillä huomioilla

$$6\pi = A + \frac{7}{6} \cdot 4\pi + (4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 4\pi),$$

eli

$$A = \frac{36\pi - 7 \cdot 4\pi + 3 \cdot 4\pi}{6} - 4\sqrt{3} = \frac{10}{3}\pi - 4\sqrt{3}.$$

A2. Koska neliöt ovat epänegatiivisia, niin $x^2 + (10y - y^2)^2 \geq 0$, joten annetusta yhtälöstä $x^2 + (10y - y^2)^2 + y^6 = 2011$ seuraa $y^6 \leq 2011$. Tästä seuraa, että $|y| \leq 3$, koska muuten $y^6 \geq 4^6 = 2^{12} = 4096 > 2011$.

Käydään läpi mahdolliset arvot $y = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Kulkakin y:n arvolla saadaan toisen asteen yhtälö x:n suhteen, joka voidaan ratkaista ja katsoa, onko ratkaisut kokonaislukuja. Läpikäyntiä voi nopeuttaa huomaamalla, että missä tahansa ratkaisussa y on pariton:

Ratkaistava yhtälö edellyttää, että $2011 = x^2 + (10y - y^2)^2 + (y^3)^2$ on kolmen neliön summa. Koska kaikilla kokonaisluvuilla t pätee $t^2 \equiv 0 \pmod 4$ (jos t on parillinen) tai $t^2 \equiv 1 \pmod 4$ (jos t on pariton) ja koska $2011 \equiv 3 \pmod 4$, niin näiden kolmen neliön täytyy olla parittomia. Erityisesti y on pariton.

Käydään sitten läpi mahdolliset arvot $y = -3, -1, 1, 3$.

Jos $y = -3$, niin yhtälöstä seuraa $x^2 = 2011 - (10 \cdot (-3) - (-3)^2)^2 - (-3)^6 = -239 < 0$, mikä on mahdotonta. Jos $y = -1$, niin vastaavasti saadaan $x^2 = 1889$, mutta 1889 ei ole neliöluku, koska se on neliölukujen $43^2 = 1849$ ja $44^2 = 1936$ välissä. Jos $y = 1$, niin vastaavasti saadaan $x^2 = 1929$, ja taas 1929 on neliölukujen 43^2 ja 44^2 välissä. Lopulta jos $y = 3$, niin saadaan $x^2 = 841$, ja $841 = 29^2$ on neliöluku. Saadaan siis ratkaisut

$$\begin{cases} x = \pm 29, \\ y = 3. \end{cases}$$

A3. Sievennetään aluksi epäyhtälöä $|f(x) - f(y)| \leq 2011$. Todetaan ensiksi, että

$$f(x) = 1 - \frac{2011x}{x^2+1},$$

joten epäyhtälö $|f(x) - f(y)| \leq 2011$ pätee täsmälleen silloin, kun

$$\left|\frac{-2011x}{x^2+1} - \frac{-2011y}{y^2+1}\right| \leq 2011$$

eli kun

$$\left|\frac{x}{x^2+1} - \frac{y}{y^2+1}\right| \leq 1.$$

Olkoon $g(x) = x/(x^2+1)$. Haluamme todistaa, että funktion g minimi- ja maksimiarvot ovat enintään yhden päässä toisistaan.

Koska $g(x)$ on positiivinen kun x on positiivinen ja negatiivinen jos x on negatiivinen, niin maksimiarvo a saavutetaan positiivisilla luvuilla. Lisäksi koska $g(-x) = -g(x)$, on funktion minimiarvo $-a$. Jotta minimi- ja maksimiarvot ovat enintään yhden päässä toisistaan, tulee päteä $a \leq 1/2$.

Huomataankin, että epäyhtälö

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

voidaan kirjoittaa muodossa

$$2x \leq x^2 + 1$$

eli

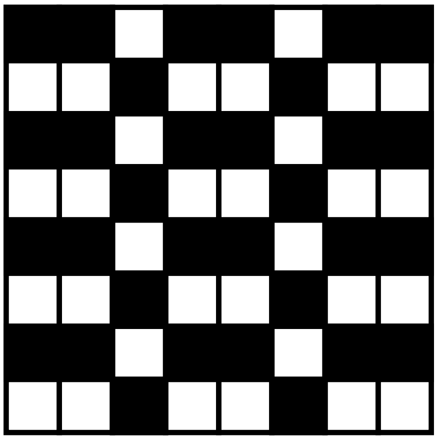
$$0 \leq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Tämä pätee, koska neliö on epänegatiivinen.

Tämä todistaa, että g:n maksimiarvo on enintään $1/2$. Edellä todetun symmetrian vuoksi g:n minimiarvo on vähintään $-1/2$, joten olemme valmiit.

Huomautus: Tehtävän voi ratkaista myös käyttämllä lukiossa esitettävän differentiaalilaskennan menetelmiä: derivoidaan f, etsitään derivaatan nollakohdat ja lasketaan tätä kautta f:n minimi- ja maksimiarvot.

A4. Asetetaan laatat tasoon niin, että niiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja keskipisteiden koordinaatit kokonaislukuja. Pisteen $(m,n), m,n \in \mathbb{Z}$ päälle astetaan valkoinen laatta, jos joko m on kolmella jaollinen ja n parillinen tai m ei ole kolmella jaollinen ja n on pariton, muuten valitaan musta laatta. Valitun laatoituksen voi siis ajatella koostuvan yksikköneliöistä ja 2×1 -suorakaiteista.



Todistetaan sitten, ettei ole olemassa yksiväristä janaa, jonka pituus on yli 5. Jakaudutaan tapauksiin.

Tapaus 1. Janan päätepisteet ovat laatoituksessa samalla vaakarivillä.

Tässä tapauksessa pisin jana saadaan valitsemalla 2×1 -suorakaiteen lävistäjä. Tämän lävistäjän pituus on $\sqrt{5} < 5$.

Tapaus 2. Janan toinen päätepiste on laatoituksessa yhden ylemmällä vaakarivillä kuin toinen päätepiste.

Nähdään, että tässä tapauksessa janan päätepisteiden x-koordinaatit ovat enintään kolmen päässä toisistaan. Jana voidaan siis rajata 3×2 -suorakaiteen sisälle, joten sen pituus on enintään tämän suorakaiteen lävistäjän pituus $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} < 5$.

Tapaus 3. Janan toinen päätepiste on laatoituksessa vähintään kahta ylemmällä vaakarivillä kuin toinen päätepiste.

Tässä tapauksessa jana kulkee siis vähintään kahden ruutujen risteyskohdan läpi. Huomataan, että ainoa vaihtoehto on, että jana kulkee 45 tai 135 asteen kulmassa vaakatasoon nähden, ja että sen päätepisteiden x- ja y-koordinaattien erotukset ovat enintään 3. Jana voidaan siis rajata jonkin 3×3 -neliön sisälle, eli sen pituus on enintään lävistäjän pituus $\sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} < 5$.