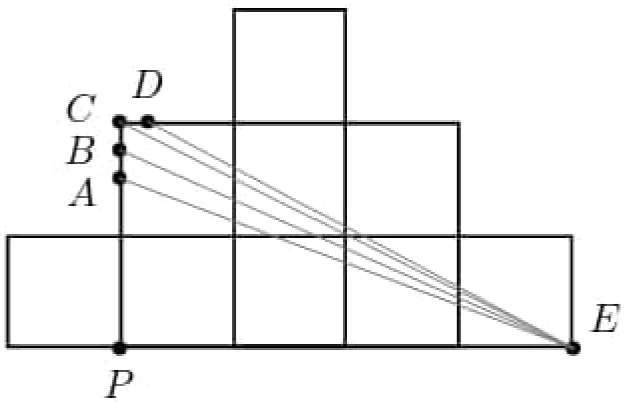
Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2011

	a	b	c	d
1.	$+$	$-$	$-$	$+$
2.	$-$	$+$	$-$	$-$
3.	$+$	$-$	$+$	$+$
4.	$-$	$+$	$+$	$+$
5.	$+$	$-$	$+$	$-$
6.	$-$	$-$	$+$	$-$

P1. $5^{140} \cdot 8^{47} = 5^{140} \cdot (2^3)^{47} = 5^{140} \cdot 2^{3 \cdot 47} = 5^{140} \cdot 2^{141} = 2 \cdot (5 \cdot 2)^{140} = 2 \cdot 10^{140}$, jossa on 141 numeroa, siis pariton määrä.

P2. Piirretään kuvioon apupiste P ja eri leikkausvaihtoehdot.



Kolmiot APE, BPE ja CPE ovat kaikki suorakulmaisia, ja niillä on yhteinen kateetti PE, jonka pituus on 4, mutta toisen kateetitn pituus h, ja siten myös kolmion ala $4h/2 = 2h$ vaihtelee. Jotta hypotenuusa jakaisi kuvion kahteen yhtäsuureen osaan, täytyy olla $1+2h = 9/2$ eli $h = 7/4 = 1\frac{3}{4}$. Koska janan BP pituus on juuri $2-\frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$, niin vaihtoehto b on oiken ja a sekä c vääriä. Janalla ED leikkaaminenkaan ei käy päinsä, koska janan ED yläpuolelle jää vielä vähemmän alaa kuin CE:n.

P3. Olkoon tarkasteltava kuusikulmio $ABCDEF$. Jokaisesta kärjestä voidaan piirtää 3 lävistäjää ja jokainen lävistäjä tulee näin laskettua kahdesti, joten lävistäjiä on $(6 \cdot 3)/2 = 9 < 10$, joten vaihtoehto a on oikein. Jos kuusikulmion lävistäjillä olisi yhteinen piste O, niin lävistäjillä AC, AD ja AE olisi kaksi yhteistä pistettä A

ja O, joten A, C, D ja E olisivat samalla suoralla. Samalla tavalla päätellään, että D, F, A ja B ovat samalla suoralla, joten kaikki kuusikulmion kärjet ovat samalla suoralla, mikä on mahdotonta, joten b on väärin. Jos $ABCDEF$ on säännöllinen, niin lävistäjät BF ja DE ovat yhdensuuntaiset, sillä ne saadaan toisistaan $180°$ kierrolla symmetriakeskipisteen suhteen. Nämä lävistäjät eivät leikkaa toisiaan. Siis c ja d ovat oikein.

P4. Jos kolmion sivut ovat $2a, a^2+1$ ja a^2-1, missä $a > 1$, niin kolmio on suorakulmainen Pythagoraan (käänteis)lauseen nojalla, sillä

$$(a^2-1)^2 + (2a)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2+1)^2.$$

Siis suurin kulmista on suora ja muut teräviä (a väärin ja b oikein) sekä hypotenuusa a^2+1 on sivuista pisin. Kateettien suuruusjärjestys riippuu sen sijaan luvun a arvosta: jos $a = 2$, niin $2a = 4 > 3 = a^2 - 1$, jos taas $a = 3$, niin $2a = 6 < 8 = a^2 - 1$.

P5. $f(0) = a\cdot 0^5 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0 + 2 = 2$, joten a on oikein. Edelleen $f(3)+f(-3) = a\cdot 3^5 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3 + 2 + a\cdot(-3)^5 + b\cdot(-3)^5 + c\cdot(-3) + 2 = a\cdot 3^5 + b\cdot 3^3 + c\cdot 3 + 2 - a\cdot 3^5 - b\cdot 3^3 - c\cdot 3 + 2 = 4$, mistä seuraa $f(-3) = 4 - f(3) = 4 - 5$, joten myös c on oikein, mutta loput vaihtoehdoista ovat vääriä.

P6. Jos luvussa $n \in \mathbb{N}$ on yli 10 numeroa, kaikki numerot eivät voi olla eri numeroita. Koska $100^5 = 10^{10}$ on 11-numeroinen luku, haluttuja lukuja on enintään 99. Edelleen huomataan, että jos $64 \le n < 100$, niin $10^{10} > n^5 > 64^5 = (2^6)^5 = 2^{30} = (2^{10})^3 > 1000^3 = 10^9$, joten tässä tapauksessa luvussa n^5 on täsmälleen 10 numeroa ja jos numerot eivät toistu, niin luvun n^5 numeroiden summa $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ on kolmella jaollinen luku jolloin luvut n^5 ja n ovat myös kolmella jaollisia. Tällaisia lukuja on n on korkeintaan $(99 - 66)/3 + 1 = 12$ kappaletta, joten haluttuja lukuja on enintään $63 + 12 = 75$. Karsitaan vielä luvut $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 90$, sillä näiden viidensissä potensseissa on ainakin viisi nollaa. Haluttuja lukuja on enintään $75 - 7 = 68$. Vain c on siis oikein.

Huomautus: Itse asiassa halutunlaisia lukuja on vain kymmenen, ja ne ovat seuraavassa taulukossa potensseineen.

n	1	2	3	4	5	7	8	14	16	38
n^5	1	32	243	1024	3125	16807	32768	537824	1048576	79235168

P7. Kun junat kulkevat samaan suuntaan, niin nopeampi juna etenee suhteellisella nopeudella $u - v$ hitaampaan nähden. Merkitään junien yhteistä pituutta a:lla. Sivuuttaessa nopeamman junan on edettävä matka $2a$ hitaampaan verrattuna, joten sivuuttamisaika on tässä tapauksesa

$$t = \frac{2a}{u-v}.$$

Kun junat kulkevat vastakkaisiin suuntiin, niin sivuuttamisajaksi saadaan vastaavasti

$$u = \frac{2a}{u+v}.$$

Koksa oletettiin, että $t = 2u$, niin

$$\frac{2a}{u-v} = \frac{4a}{u+v} \Leftrightarrow u + v = 2(u - v) \Leftrightarrow 3v = u \Leftrightarrow u/v = 3.$$

P8. Todistetaan epäyhtälö erilaisilla arvioilla riippuen siitä, kuinka suuri x on.

Kun $x < 0$, niin kaikki summattavat ovat positiivisia, joten epäyhtälö pätee. Kun $0 \leq x < 1$, niin $x^3 < x^2$ ja $x < 1$, joten

$$x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 > x^6 \geq 0.$$

Kun $x \geq 1$, niin $x^6 \geq x^3$ ja $x^2 \geq x$, joten

$$x^6 - x^3 + x^2 - x + 1 \geq 1 > 0.$$