# Lukion matematiikkakilpailun välisarjan ratkaisuja 2011

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| 2. | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| 3. | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |

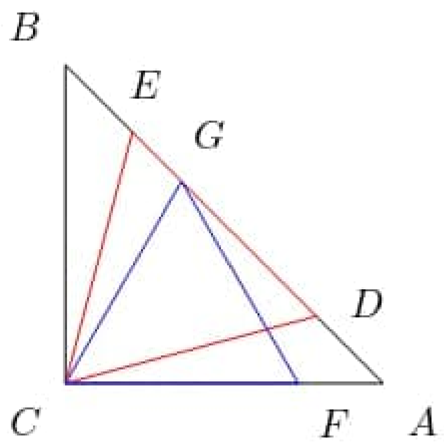
**V1.** Olkoon $x$ sellainen luku, että pelipotti on kaikkiaan $270x$ euroa. Alussa pelaajilla on $108x, 90x$ ja $72x$, lopussa $105x, 90x$ ja $75x$ euroa. Voittanut pelaaja on siis viimeinen, ja hänen voittonsa on $3x = 3$. Siis $x = 1$ ja pelaajalla on lopussa 75 euroa. Siis b on oikein ja muut väärin.

**V2.** Paritonta astetta olevalla polynomiyhtälöllä on tunnetusti reaalisia ratkaisuja. Toisaalta: kun $x_0 < x_1$, niin myös $x_0^{2011} < x_1^{2011}$, sillä 2011 on pariton. Siis kuvaus $x \to x^{2011} + x + 1$ on aidosti kasvava, joten reaalinen ratkaisu on yksikäsitteinen eli vaihtoehto a on oikein. Koska $0^{2011} + 0 + 1 = 1$, niin vastaavan polynomin kasvavuudesta seuraa, että tämän ratkaisu on negatiivinen eli c on väärin. Se on välillä $[-1, 1]$, sillä $(-1)^{2011} + (-1) + 1 = -1 < 0$ ja $1^{2011} + 1 + 1 = 3$. Yksikäsitteinen ratkaisu ei kuitenkaan voi olla rationaalinen, sillä tunnetun yleisen kriteerion mukaan ainoat rationaaliset ehdokkaat ovat $x = \pm 1$, eikä kumpikaan näistä ole juuri. Siis b on väärin.

**V3.** Koska $211 < 17^2 = 289$, riittää testata jaollisuutta pienillä alkuluvuilla $2, 3, 5, 7, 11$ ja $13$, jotta osataan sanoa, onko 211 alkuluku. Testaamisen voi tehdä suoraan jakolaskulla tai nopeammin erilaisilla tempuilla: Viimeisestä numerosta 1 nähdään, ettei 211 ole jaollinen kahdella tai viidellä. Koska $211 - 1 = 210 = 3 \cdot 7 \cdot 10$, ei jaollisuus kolmella tai seitsemällä tule myöskään kyseeseen. Koska vuorotteleva summa $2 - 1 + 1 = 2$ ei ole luvulla 11 jaollinen, ei myöskään 211 ole. Lopuksi todetaan, että $211 = 13 \cdot 16 + 2$. Siis 211 on alkuluku (vaihtoehto a). Alkuluvun määritelmän nojalla se ei voi olla kahden alkuluvun tulo, joten b on väärin. Pariton luku voi olla kahden alkuluvun summa vain, jos toinen näistä alkuluvuista on 2, mutta $211 - 2 = 209 = 19 \cdot 11$ ei ole alkuluku, joten c on väärin. Luvulle 211 on olemassa sen sijaan lukuisia esityksiä kolmen alkuluvun summana, kuten $211 = 101 + 97 + 13$, joten d on oikein.

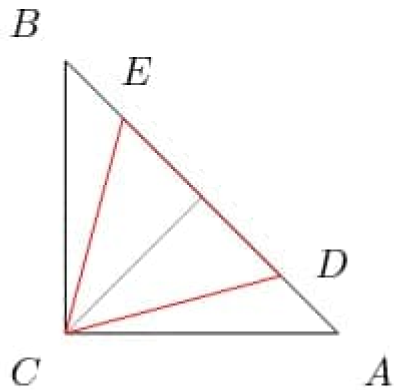
**Huomautus:** Niin sanottu Goldbachin heikko konjektuuri sanoo, että ei ainoastaan luku 211, vaan jokainen pariton viittä suurempi kokonaisluku voidaan esittää kolmen alkuluvun summana. Monien osittaisten tulosten jälkeen kokonainen todistus väitteelle saatiin vuonna 2013 (eli tämän kilpailun järjestämisen jälkeen!)

**V4.** Nimetään tehtävään liittyvät pisteet seuraavasti.

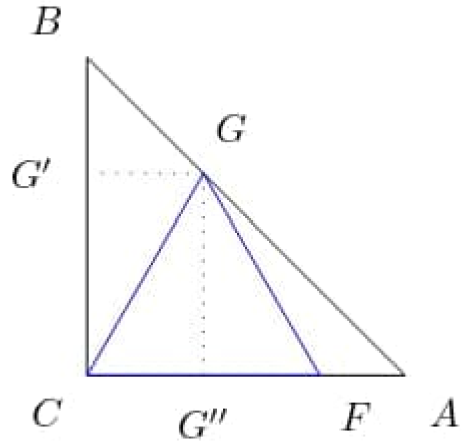



Kolmio $k_1$ on siis $CDE$ ja kolmio $k_2$ taas $CFG$. Kolmion $k_1$ sivun pituuden $s_1$ saa johdettua siitä, että kolmiolla $k_1$ ja $CAB$ on yhteinen kärjestä $C$ lähtevä korkeusjana, jonka korkeus on (katsomalla kolmiota $CAB$) $a/\sqrt{2}$ ja toisaalta (katsomalla kolmiota $CDE$) $s_1\sqrt{3}/2$. Täten

$$\frac{s_1\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = \frac{2a}{\sqrt{6}}.$$




Tasasivuisen kolmion $k_2$ sivun pituus $s_2$ saadaan seuraavasti: olkoon $G'$ pisteestä $G$ piirretyn korkeusjanan kantapiste sivulle $BC$ ja vastaavasti $G''$ korkeusjanan kantapiste sivulle $AC$.




Tällöin kolmion $BG'G$ on myös suorakulmaisen tasakylkinen kolmio, joten $|BG'| = |G'G| = |CG''| = \frac{1}{2}s_2$. Toisaalta

$$|BG'| = |BC| - |G'C| = a - |GG''| = a - \frac{\sqrt{3}}{2}s_2,$$

joten $\frac{1}{2}s_2 = a - \frac{\sqrt{3}}{2}s_2$ eli $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})s_2 = a$ eli $s_2 = \frac{2a}{1+\sqrt{3}}$. Siis kysytty suhde on

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{6}}}{\frac{2a}{1+\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}12.$$

**V5.** Koska neliöt ja neliöjuuret ovat vähintään nolla, yhtälö voi päteä vain jos $x^2 - y^2 = 0$ ja jos vähintään toinen yhtälöistä $x^2 + y^2 - 8 = 0$ ja $1 - xy = 0$ pätee. Ehdosta $x^2 - y^2 = 0$ saadaan $|x| = |y|$. Nyt $x^2 + y^2 - 8 = 0$ pätee jos $2x^2 = 8$ eli $|x| = 2$. Yhtälö $1 - xy = 0$ pätee vain jos $|x| = 1$ ja $x = y$. Tästä saadaan, että ratkaisut ovat parit

$$(x, y) = (1, 1), (-1, -1), (2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2).$$

**V6.** Kun $n$ on positiivinen kokonaisluku ja $p$ on alkuluku, merkitään $v_p(n)$:llä suurinta eksponenttia $a$, jolla $p^a \mid n$. On tunnettu fakta, että

$$v_p(n!) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \cdots,$$

missä $\lfloor x \rfloor$ on luku $x$ pöyristettynä alaspäin lähimpään kokonaislukuun. (Tämä fakta seuraa siitä, että luvuista $1, 2, \ldots, n$ luvulla $p$ jaollisia on $\lfloor n/p \rfloor$ lukua, näistä edelleen luvulla $p^2$ jaollisia $\lfloor n/p^2 \rfloor$ lukua ja niin edelleen.)

Luku $n$ päättyy $k$ nollaan täsmälleen silloin, kun se on jaollinen luvulla $10^k$ eli täsmälleen silloin, kun $v_2(n) \geq k$ ja $v_5(n) \geq k$. Yllä olevasta kaavasta seuraa suoraan, että $v_2(n!) \geq v_5(n!)$ kaikilla $n$ (koska $\lfloor n/2^m \rfloor \geq \lfloor n/5^m \rfloor$ kaikilla $m \geq 1$). Täten $n!$ päättyy tasan $v_5(n!)$ nollaan kaikilla $n$.

Lähdetään sitten etsimään luvun $n$ arvoa, jolla $v_5(n!) = 154$. Kokeilujen jälkeen huomataan, että

$$v_5(625!) = \lfloor 625/5 \rfloor + \lfloor 625/25 \rfloor + \lfloor 625/125 \rfloor + \lfloor 625/625 \rfloor = 125 + 25 + 5 + 1 = 156$$

ja

$$v_5(624!) = \lfloor 624/5 \rfloor + \lfloor 624/25 \rfloor + \lfloor 624/125 \rfloor = 124 + 24 + 4 = 152.$$

Tästä nähdään, että joko $n!$ päättyy enintään 152 nollaan (jos $n \leq 624$) tai vähintään 156 nollaan (jos $n \geq 625$). *Siis minkään positiivisen kokonaisluvun kertoma ei pääty täsmälleen* 154 *nollaan.*