

Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2012

A1. Puretaan ensiksi määritelmät:

$$\begin{aligned}(x * x) * 1 &= \\(x^2 + x^2 - x \cdot x) * 1 &= \\x^2 * 1 &= \\x^4 + 1 - x^2 &= \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}x * (x * 1) &= \\x * (x^2 + 1 - x) &= \\x^2 + (x^2 + 1 - x)^2 - x(x^2 + 1 - x) &= \\x^2 + (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) - (x^3 + x - x^2) &= \\x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1. &= \end{aligned}$$

Ratkaistavana on siis yhtälö

$$x^4 + 1 - x^2 = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1,$$

joka sievenee muotoon

$$3x^3 - 6x^2 + 3x = 0.$$

Tämä polynomi jakautuu tekijöihin:

$$3x^3 - 6x^2 + 3x = 3x(x^2 - 2x + 1) = 3x(x - 1)^2.$$

Täten yhtälön ratkaisut ovat $x = 0$ ja $x = 1$.

A2. Olli voittaa seuraavalla strategialla: hän poistaa pöydältä aina sen verran pelimerkkejä, että hänen vuoronsa jälkeen pöydällä on neljällä jaollinen määrä pelimerkkejä. (Toisin sanoen jos Liisa poistaa yhden merkin, Olli poistaa kolme, jos Liisa poistaa kaksi niin Olli kaksi ja jos Liisa poistaa kolme niin Olli poistaa yhden.) Olli pystyy pelaamaan näin, koska 2012 on jaollinen neljällä.

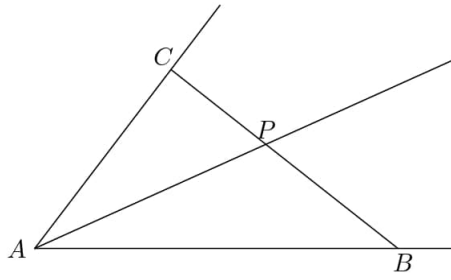
Jossakin kohtaa peli etenee siihen tilanteeseen, että pöydällä on neljä pelimerkkiä ja on Liisan vuoro. Liisan pelattua Olli saa poisettua viimeiset pelimerkit.

A3. Kolmeen peräkkäiseen ruutuun kuuluva työmäärä on

$$2^i + 2^{i+1} + 2^{i+2} = 2^i(1 + 2 + 4) = 7 \cdot 2^i,$$

missä i on kokonaisluku, siis 2^i kokonaista viikkoa. Ensimmäistä ruutua vastaava työ tulee tehtyä ensimmäisenä maanantaina, ja loput $64 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$ ruutua voi ryhmitellä kolmea peräkkäistä ruutua vastaaviksi työrupeamiksi, jotka kestävät kokonaisia viikkoja. Siis *työ päättyy maanantaina*.

A4.



Kun kolmion ABC pinta-ala lasketaan kahdella eri tavalla (toisaalta suoraan ja toisaalta jakamalla kolmio kolmioiksi ABP ja APC), saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|AB||AC| \sin 2\alpha &= \frac{1}{2}|AP||AC| \sin \alpha + \frac{1}{2}|AB||AP| \sin \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{1}{|AP|} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} &= \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}.\end{aligned}$$

Koska kulma α ja $|AP|$ ovat vakioita, niin myös yhtälön vasen puoli pysyy vakiona.