Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2012

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$-$
2.	$-$	$-$	$+$	$-$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$
4.	$-$	$+$	$-$	$+$
5.	$+$	$-$	$+$	$-$
6.	$+$	$+$	$+$	$-$

P1. Koska massojen suhteet (alkuperäinen timantti mukaan lukien) ovat $3 : 4 : 7$, niin arvojen suhteet ovat $9 : 16 : 49$. Lohjenneen timantin arvo alkuperäisestä arvosta on siis

$$\frac{9+16}{49} \cdot 100\% \approx 51\%.$$

P2. Jos hunneja on aluksi $4t$ ja vandaaleja t, niin erottamisen jälkeen vandaalien osuus on

$$\frac{t}{\frac{1}{3}4t+t} = \frac{3}{7}.$$

P3. a) $2^{2^2} = 2^4 = 16 < 27 = 3^3$, joten tehtävänannon vertailu on epätosi.

b) $3^{3^3} = 3^{27} > 3^{2\cdot 13} = 9^{13} > 5^5$, joten vastaava vertailu pitää paikkansa.

c) $(-4)^{-4} > 0 > (-5)^{(-5)}$, joten tehtävänannon vertailu on epätosi.

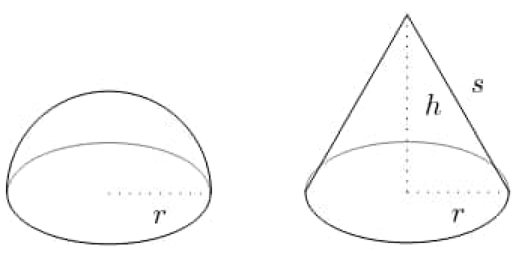
d) $(-2)^2 = 4$, joten $((-2)^2)^{((-2)^2)} = 4^4$ pitää paikkansa.

P4.

$$\frac{2^{2013}+2^{2011}}{2^{2012}-2^{2010}} = \frac{2^{2000}\cdot(2^{13}+2^{11})}{2^{2000}\cdot(2^{12}-2^{10})} = \frac{2^{13}+2^{11}}{2^{12}-2^{10}} = \frac{2^3+2^1}{2^2-2^0} = \frac{8+2}{4-1} = \frac{10}{3},$$

joten kohdat b ja d ovat oikein ja kohdat a ja c eivät ole oikein.

P5.



Puolipallon vaipan ala on $\frac{1}{2}4\pi r^2 = 2\pi r^2$ ja kartion vaipan ala on πrs, missä r on yhteisen pohjaympyrän säde ja s on kartion sivusärmän pituus. Koska vaippojen alat ovat yhtä suuret, niin $2\pi r^2 = \pi rs$ eli $s = 2r$. Toisaalta kartio on suora, joten Pythagoraan lauseesta seuara

$$r^2 + h^2 = s^2 = (2r)^2 = 4r^2 \implies h^2 = 3r^2 \implies h = r\sqrt{3}.$$

Siis tilavuuksien suhde on

$$V_{\mathrm{k}}/V_{\mathrm{pp}} = \frac{\pi r^3}{\sqrt{3}} : \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,$$

joten kohdat c ja a ovat oikein ja muut ovat vääriä.

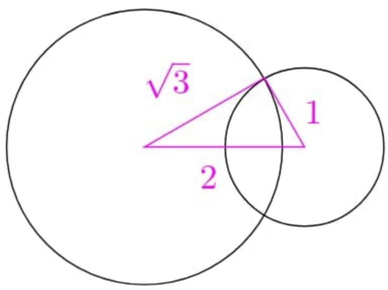
P6. a) Totta, suuren kuution voi kasata pelkästään yksikkökuutioista.

b) Totta: Sijoitetaan suuri kuutio koordinaatistoon niin, että särmät ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja keskipiste origossa. Tällöin jokainen kasaamisessa käytetty pikkukuutio, jonka särmän pituus on vähintään kaksi, sisältää ainakin yhden kahdeksasta pisteestä muotoa $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Siis tällaisia kuutioita käytetään kasaamisessa korkeintaan 8. Lisäksi näistä pikkukuutioista korkeintaan yhden särmän pituus on 3, sillä $3 + 3 > 5$, joten tällaisten pikkukuutioiden yhteistilavuus on korkeintaan $3^3 + 7 \cdot 2^3 = 27 + 56 = 83$. Yksikkökuutioita tarvitaan siis vähintään $5^3 - 83 = 125 - 83 = 42$ kappaletta, ja pikkukuutioita kaikkiaan vähintään $8 + 42 = 50$ kappaletta (mitä pienempiä pikkukuutiot ovat, niin sitä enemmän niitä tietenkin tarvitaan).

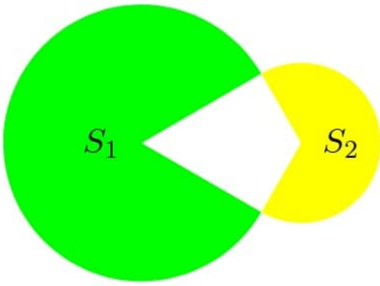
c) Totta: Oletetaan, että suuren kuution pinta on kasattu kokonaan yksikkökuutioista. Tällöin ei voi siis tietää, onko suuren kuution ytimessä pikkukuutio, jonka sivun pituus on 3, vai esimerkiksi pelkkiä yksikkökuutioita. Edellisessä tapauksessa tarvitaan $5^3 - 3^3 + 1 = 99$, jälkimmäisessä tapauksessa $5^3 = 125$ pikkukuutiota.

d) Ei pidä paikkansa, sillä jokaisen pikkukuution ala on parillinen kokonaisluku $6 \cdot s^2$, missä s on kokonaisluku. Siis yhteispinta-akain on parillinen kokonaisluku.

P7. Koska ympyöiden säteet ovat $\sqrt{3}$ ja 1 sekä keskipisteiden etäisyys 2, niin Pythagoraan käänteislauseesta seuraa, että säteet muodostavat keskipisteiden yhdysjanan kanssa suorakulmaisen kolmion, sillä $(\sqrt{3})^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$.



Lisäksi kulmat ovat $30, 60$ ja 90 astetta, sillä pienimmän kateetin ja hypotenuusan suhde on $1 : 2$. Ympyröiden peittämästä alueesta voi siis ottaa pois kaksi tällaista suorakulmaista kolmiota,



jolloin jäljelle jää kaksi isoa sektoria, joiden alat ovat

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cdot (\sqrt{3})^2 = \frac{5\pi}{6} \cdot 3 = \frac{5\pi}{2}$$

ja

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot 1^2 = \frac{2\pi}{3}.$$

Mainittujen suorakulmaisen kolmion ala puolestaan on $A = \sqrt{3}/2$, joten ympyröiden peittämä ala on kaikkiaan

$$S_1 + S_2 + 2A = \frac{5}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} = 3\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}.$$

Toisaalta ympyröiden pinta-alojen summa on $\pi(\sqrt{3})^2 + \pi \cdot 1^2 = 4\pi$. Leikkausalueen pinta-ala on näiden erotus eli

$$4\pi - \left((3\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}.$$

P8. Merkitään $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä a, b ja c ovat kokonaislukuja. Koska $f(n)$ on viidellä jaollinen, kun n on kokonaisluku, niin erityisesti $f(0) = c, f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$ ja $f(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c$ ovat viidellä jaollisia. Tästä seuraa $5 \mid c, 5 \mid f(1) + f(-1) = (a + b + c) + (a - b + c) = 2a + 2c$ ja $5 \mid f(1) - f(-1) = (a + b + c) - (a - b + c) = 2b$. Koska kokonaisluvuilla 2 ja 5 ei ole yhteisiä tekijöitä, niin edelleen $5 \mid b$ ja $5 \mid a + c$. Koska $5 \mid c$ ja $5 \mid a + c$, niin $5 \mid a$. Siis kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.