Lukion matematiikkakilpailun välisarjan ratkaisuja 2012

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$+$
2.	$+$	$-$	$+$	$-$
3.	$+$	$+$	$+$	$-$

V1. Kun $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, niin $\tan\alpha > 1$, joten $\sin^2\alpha + \tan^2\alpha \geq \tan^2\alpha > 1$ (siis a epätosi). Epäyhtälö $\sin\alpha \leq \alpha$ pitää paikkansa (b tosi), sillä α on yksikköympyrän kulmaa α vastaava kaaren pituus, kun taas $\sin\alpha$ on tämän kaaren kohtisuora projektio y-akselille. Koska $0 < \cos\alpha < 1$, niin $\tan^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha \geq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (c tosi). Kohta d seuraa suoraan tangentin määritelmästä $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ ja siitä, että $\cos\alpha \neq 0$, kun α on terävä kulma.

V2. Jos luvut ovat a ja b, niin a ja b ovat neljällä jaollisia ja molemmat niistä jakavat luvun 24. Täten a ja b ovat joitakin luvuista $4, 8, 12$ ja 24. Käydään sitten eri tapauksia läpi. Symmetrian vuoksi riittää tutkia tilanteita, joissa $a \leq b$.

Tapaus 1: $a = 4$. Koska 24 on pienin luku, joka on jaollinen a:lla ja b:llä, tulee olla $b = 24$. Tällöin summa $a + b$ on 28.

Tapaus 2: $a = 8$. Koska 4 on suurin luku, joka jakaa molemmat luvuista a ja b, vaihtoehdoista $8, 12$ ja 24 kelpaa b:n arvoksi vain $b = 12$. Tällöin 24 todella on pienin luku, joka on jaollinen molemmilla luvuista a ja b. Summa $a + b = 8 + 12 = 20$ on täten myös mahdollinen.

Tapaus 3: $a = 12$. Tällöin 12 jakaa molemmat luvuista a ja b, mikä ei käy: suurimman yhteisen tekijän piti olla 4.

Tapaus 4: $a = 24$. Kuten tapauksessa 3 saadaan ristiriita.

Siis lukujen summa voi olla 20 tai 28.

V3. a) Totta, suuren kuution voi kasata pelkästään yksikkökuutioista.

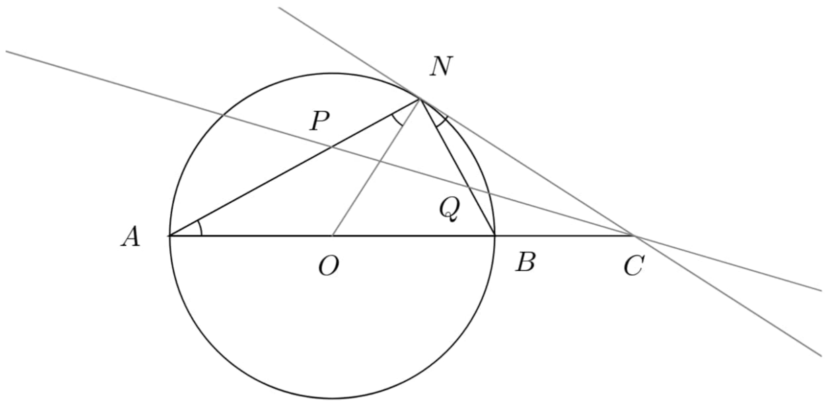
b) Totta: Sijoitetaan suuri kuutio koordinaatistoon niin, että särmät ovat koordinaattiakselien suuntaisia ja keskipsite origossa. Tällöin jokainen kasaamisessa käytetty pikkukuutio, jonka särmän pituus on vähintään kaksi, sisältää ainakin yhden kahdeksasta pisteestä muotoa $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Siis tällaisia kuutioita käytetään kasaamisessa korkeintaan 8. Lisäksi näistä pikkukuutioista korkeintaan yhden särmän pituus on 3, sillä $3 + 3 >$, joten tällaisten pikkukuutioiden yhteistilavuus on korkeintaan $3^3 + 7 \cdot 2^3 = 27 + 56 = 83$. Yksikkökuutioita tarvitaan siis vähintään $5^3 - 83 = 125 - 83 = 42$ kappaletta, ja pikkukuutioita kaikkiaan vähintään $8 + 42 = 50$ kappaletta (mitä pienempiä pikkukuutiot ovat, niin sitä enemmän niitä tietenkin tarvitaan).

c) Totta: Oletetaan, että suuren kuution pinta on kasattu kokonaan yksikkökuutioista. Tällöin ei voi siis tietää, onko suuren kuution ytimessä pikkukuutio, jonka sivun pituus on 3, vai esimerkiksi pelkkiä yksikkökuutioita. Edellisessä tapauksessa tarvitaan $5^3 - 3^3 + 1 = 99$, jälkimmäisessä tapauksessa $5^3 = 125$ pikkukuutiota.

d) Ei pidä paikkansa, sillä jokaisen pikkukuution ala on parillinen kokonaisluku $6 \cdot s^2$, missä s on kokonaisluku. Siis yhteispinta-akain on parillinen kokonaisluku.

V4. Merkitään $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä a, b ja c ovat kokonaislukuja. Koska $f(n)$ on viidellä jaollinen, kun n on kokonaisluku, niin erityisesti $f(0) = c, f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$ ja $f(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = a - b + c$ ovat viidellä jaollisia. Tästä seuraa $5 \mid c, 5 \mid f(1) + f(-1) = (a + b + c) + (a - b + c) = 2a + 2c$ ja $5 \mid f(1) - (f - 1) = (a + b + c) - (a - b + c) = 2b$. Koska kokonaisluvuilla 2 ja 5 ei ole yhteisiä tekijöitä, niin edelleen $5 \mid b$ ja $5 \mid a + c$. Koska $5 \mid c$ ja $5 \mid a + c$, niin $5 \mid a$. Siis kaikki polynomin f kertoimet ovat viidellä jaollisia.

V5. Olkoon $\alpha = \angle NAB$ ja O ympyrän keskipiste. Kehäkulmalauseen tangenttiversion nojalla pätee $\angle BNC = \alpha$. (Tämän näkee huomaamalla, että kulmat $\angle ANB$ ja ONC ovat molemmat suoria, joten kulmien $\angle ANO$ ja $\angle BNC$ tulee olla yhtä suuria. Mutta kolmio AON on tasakylkinen, joten $\angle ANO = \alpha$, joten myös $\angle BNC = \alpha$.)



Koska AB on ympyrän halkaisija, pätee $\angle ANB = 90°$. Täten $\angle ABN = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$, joten kolmiossa BNC kulma $\angle BNC$ on α, $\angle NBC$ on $90° + \alpha$ ja täten viimeinen kulma $\angle BCN$ on

$$\angle BCN = 180° - \alpha - (90° + \alpha) = 90° - 2\alpha.$$

Nyt kolmiossa APC kulma $\angle PAC$ on α ja kulma $\angle ACP$ on $(90° - 2\alpha)/2 = 45° - \alpha$, joten viimein kulma on

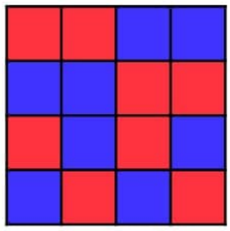
$$\angle APC = 180° - \alpha - (45° - \alpha) = 135°,$$

eli

$$\angle NPQ = 45°.$$

Täten kolmiossa NPQ yksi kulma on $90°$ ja yksi kulma on $45°$, joten kolmio on tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Erityisesti $|PN| = |NQ|$.

V6. Jos $n = 4$, esimerkiksi seuraava väritys on vaatimusten mukainen.



Jos $n = 5$, niin ylimmässä rivissä on ainakin kolme samanväristä ruutua, esimerkiksi punaista. Näissä kolmen punaisen ruudun sarakkeissa ei millään muulla rivillä saa olla kahta punaista ruutua, eli näissä sarakkeissa on kullakin rivillä ainakin kaksi sinistä. Nämä kaksi sinistä voivat olla kolmessa eri asemassa, joten ainakin kahdella neljästä rivistä ne ovat samoissa sarakkeissa. Täten syntyy sininen suorakulmio.

Koska 5×5 -ruudukko ei toteuta ehtoa, ei myöskään $n \times n$ -ruudukko toteuta ehtoa, jos $n > 5$.