Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2013

A1. Ensimmäisen yhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$64 = \frac{8^x}{2^{x+y}} = \frac{2^{3x}}{2^{x+y}} = 2^{2x-y}.$$

Koska $64 = 2^6$, saadaan tästä

$$2x - y = 6.$$

Vastaavasti toinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$243 = \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} = \frac{3^{2x+2y}}{3^{4y}} = 3^{2x-2y},$$

ja koska $243 = 3^5$, saadaan tästä

$$2x - 2y = 5.$$

Tämän yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $x = 3{,}5$ ja $y = 1$.

A2. Todennäköisyys sille, että satunnaisella henkilöllä on tauti ja hän saa testistä positiivisen tuloksen on

$$\frac{1}{1\ 000\ 000} \cdot 99\%$$

ja todennäköisyys sille, että satunnaisella heniklöllä ei ole tautia ja hän saa testistä positiivisen tuloksen on

$$\frac{999\ 999}{1\ 000\ 000} \cdot 1\%.$$

Täten todennäköisyys sille, että henkilö on sairas, on

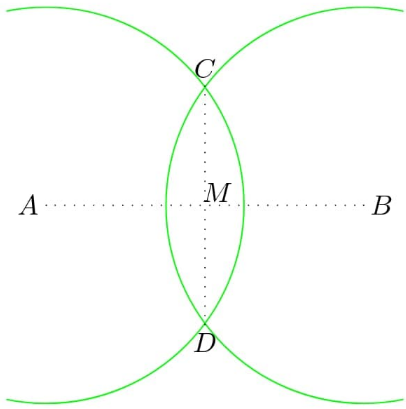
$$\frac{\frac{1}{1\ 000\ 000} \cdot 99\%}{\frac{1}{1\ 000\ 000} \cdot 99\% + \frac{999\ 999}{1\ 000\ 000} \cdot 1\%}.$$

Supistetaan prosentit pois ja lavennetaan miljoonalla:

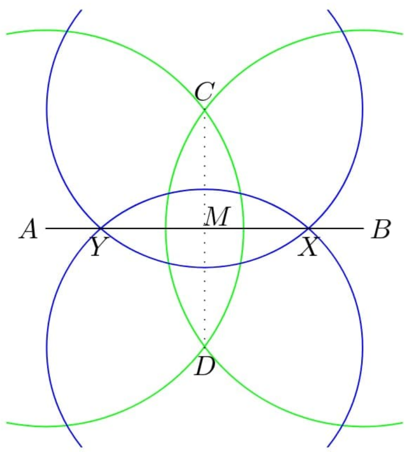
$$\frac{99}{99 + 999\ 999} = \frac{99}{1\ 000\ 098}.$$

(Tämä on noin $10^2/10^6 = 10^{-4} = 0{,}0001$ eli yksi kymmenestätuhannesta.)

A3. Piirretään A- ja B-keskiset ympyrät, joiden säteet ovat 10 cm. Olkoot näiden ympyröiden leikkauspisteet C ja D. (Kuvassa on katkoviivoilla osuudet, joita ei ole piirretty.)



Suora CD on tietenkin janan AB keskinormaali. Olkoon M janojen AB ja CD leikkauspiste. Tällöin $|AM| < |AC| = 10$ cm, koska AM on janan AC projektio suoralle AB. Samoin $|DM| = |CM| < |AC| = 10$ cm. Piirretään C- ja D-keskiset ympyrät, joiden säteeksi valitaan mikä tahansa r, jolle $|CM| < r < 10$ cm. Ympyröiden leikkauspisteet olkoot X ja Y, joista X on janalla AM. Piirretään lyhyen viivoittimen avulla jana, joka alkaa pisteestä A, kulkee pisteen X kautta ja on pituudeltaan 10 cm. Koska $|AM| < 10$ cm, tämä jana sisältää janan AM. Vastaavalla tavalla voidaan piirtää jana, joka sisältää janan MB ja sisältyy janaan AB. Nämä yhdessä muodostavat janan AB.



A4.

Yritetään ensiksi arvata vastaus. On luonteva veikkaus, että $S(2n) \leq 2S(n)$. Oikeastaan yleisemmin pätee $S(x+y) \leq S(x) + S(y)$. Perustellaan tämä ratkaisun lopuksi, ja ratkaistaan tehtävä käyttämällä tätä tietoa.

Tällä saadaan siis, että $S(2n)/S(n) \leq 2$. Alarajan saaminen suhteelle $S(2n)/S(n)$ on paljon vaikeampaa. Kokeilemalla konkreettisia tapauksia tuntuu, että $n = 5$ on paras, mitä löytyy: tällöin $S(n) = 5$ ja $S(2n) = 1$, eli suhteeksi saadaan $1/5$. Pienempää suhdetta ei tunnu löytyvän.

Perustelu epäyhtälölle $S(n) \leq 5S(2n)$ on melko vaikea keksiä, mutta tässä se on:

$$S(n) = S(10n) = S(2n + 2n + 2n + 2n + 2n) \leq$$
$$S(2n) + S(2n) + S(2n) + S(2n) + S(2n) = 5S(2n).$$

Sitten tulee tehtävän toinen vaihe: osoitetaan, että mikä tahansa rationaaliluku väliltä $[1/5, 2]$ voidaan esittää muodossa $S(2n)/S(n)$.

Maksimiarvon $S(2n)/S(n) = 2$ saavuttaa esimerkiksi $n = 1$ ja minimiarvon $S(2n)/S(n) = 1/5$ saavuttaa $n = 5$. Ideana on, että voimme "yhdistellä" näitä laittamalla numeroiden väliin paljon nollia. Jos esimerkiksi

$$n = 1000100050005000,$$

niin

$$2n = 2000200100010000,$$

eli n:n numerot $1, 1, 5, 5$ eivät vaikuta toisiinsa. Yleisesti voimme valita n:n sisältämään a kappaletta ykköstä ja b kappaletta vitosta ja paljon nollia niin, että $S(n) = a + 5b$ ja $S(2n) = 2a + b$.

Enää riittää tarkistaa, että jokainen rationaaliluku $q \in [1/5, 2]$ voidaan esittää muodossa

$$q = \frac{2a + b}{a + 5b},$$

missä $a, b \geq 0$. Kirjoitetaan $q = m/n$, jolloin halutaan ratkaisu yhtälölle

$$\frac{m}{n} = \frac{2a + b}{a + 5b} \Leftrightarrow m(a + 5b) = n(2a + b).$$

Kirjoittamalla tämä muotoon $a(m - 2n) = b(n - 5m)$ huomataan, että valitsemalla $a = n - 5m$ ja $b = m - 2n$ saadaan ratkaisu. Lisäksi kunhan $1/5 \leq m/n \leq 2$ pätee $a = n - 5m \geq 0$ ja $b = m - 2n \geq 0$.

Täten rationaaliluvun q voi esittää muodossa $S(2n)/S(n)$ täsmälleen silloin, kun $1/5 \leq q \leq 2$.

Perustellaan vielä ratkaisun alussa esitetty väite $S(x + y) \leq S(x) + S(y)$.

Todistetaan väite ensiksi, jos luvussa y on vain yksi nollasta eroava numero, eli $y = a \cdot 10^k$. Tällöin väite on helpohko: jos laskettaessa $x + y$ ei numeroita mene seuraaville kymmenille kohdassa 10^k, niin $S(x + y) = S(x) + a = S(x) + S(y)$. Jos taas numeroita menee seuraaville kymmenille, niin nähdään kohtuu helposti, että $S(x + y) \leq S(x) + S(y) - 9$, koska "menetämme" kohdassa 10^k kymmenen verran numeroiden summaa ja saamme myöhemmin enintään yhden verran takaisin.

Todistetaan väite sitten yleisesti. Kirjoitetaan $y = a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_n 10^n$.

Käytetään toistuvasti yllä saatua tulosta kullekin luvun y numerolle:

$$
\begin{aligned}
S(x+y) &= \\
S((x+10a_1+\ldots+10^n a_n)+a_0) &\leq \\
S(x+10a_1+\ldots+10^n a_n)+S(a_0) &= \\
S((x+100a_2+\ldots+10^n a_n)+10a_1)+a_0 &\leq \\
S(x+100a_2+\ldots+10^n a_n)+S(10a_1)+a_0 &= \\
S((x+1000a_3+\ldots+10^n a_n)+100a_2)+a_0+a_1 &\leq \\
&\vdots \\
S(x)+a_0+a_1+\ldots+a_n &= \\
S(x)+S(y). &
\end{aligned}
$$