Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2013

	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$-$	$+$
2.	$-$	$+$	$-$	$+$
3.	$-$	$+$	$+$	$-$
4.	$-$	$-$	$+$	$+$
5.	$+$	$+$	$-$	$-$
6.	$-$	$-$	$-$	$-$

P1. Tiedetään, että neliöjuuret $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{7}$ ovat irrationaalilukuja (tämä seuraa aritmetiikan peruslauseesta ja siitä, että 2 ja 7 ovat alkulukuja), mutta 1,414213562373 ja 2,645751311064 ovat rationaalisia. Siis kohdat a ja c ovat väärin. Kohdassa b luvut eivät ole yhtä suuria, koska $\sqrt{5-2\sqrt{6}} > 0$ ja $\sqrt{2}-\sqrt{3} < 0$. Sen sijaan pätee $\sqrt{7}+\sqrt{2} > 0$ ja $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2 = 7+2\sqrt{14}+2 = 9+2\sqrt{14}$, joten d on oikein.

P2. Olkoon ilmapallon säde ennen täyttöä r ja täytön jälkeen R, jolloin

$$\frac{R^3-r^3}{r^3} = 237{,}5\% = 2\frac{3}{8} \implies \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{R^3}{r^3} = 3\frac{3}{8} = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3,$$

joten $\frac{R}{r} = 3/2$. Tästä seuraa, että

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

ja siten

$$\frac{4\pi R^2 - 4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 125\%.$$

Ilmapallon pinta-ala kasvaa siis 125%, joka on korkeintaan 175% (ehdot b ja d), mutta ehdot a ja c ovat väärin.

P3. Koska lukuja on $n > 1$ kappaletta ja niiden keskiarvo on M, niiden summa on nM. Kun a poistetaan, jäljelle jäävien summa on $nM - a$ ja keskiarvo

$$\frac{nM-a}{n-1} \neq \frac{M-a}{n-1},$$

kunhan $M \neq 0$ (kohta a väärin). Tämä on alkuperäistä pienempi, esimerkiksi jos luvut ovat $1, 2$ ja 3, joista 3 poistetaan (kohta b on oikein). Uuden ja vanhan keskiarvon erotus on

$$\frac{nM-a}{n-1} - M = \frac{nM-a-(n-1)M}{n-1} = \frac{M-a}{n-1},$$

joten c on oikein. Uuden ja vanhan keskiarvon keskiarvo on

$$\frac{1}{2}\left(\frac{nM-a}{n-1}+M\right)=\frac{nM-a+(n-1)M}{2(n-1)}=\frac{(2n-1)M-a}{2(n-1)}\neq\frac{nM-a}{2(n-1)}.$$

kunhan $M \neq 0$ (kohta d väärin).

P4. Laventamalla saadaan toisaalta

$$\begin{aligned}
\frac{c}{a+\frac{b}{c}}+\frac{a+c}{a-\frac{b}{c}} &= \\
\frac{c^2}{ac+b}+\frac{ac+c^2}{ac-b} &= \\
\frac{c^2(ac-b)+(ac+c^2)(ac+b)}{(ac+b)(ac-b)} &= \\
\frac{ac^3-bc^2+ac(ac+b)+ac^3+bc^2}{a^2c^2-b^2} &= \\
\frac{2ac^3+ac(ac+b)}{a^2c^2-b^2} = \frac{ac(2c^2+ac+b)}{a^2c^2-b^2}&,
\end{aligned}$$

mutta toisaalta

$$\begin{aligned}
\frac{c}{a+\frac{b}{c}}+\frac{a+c}{a-\frac{b}{c}} &= \\
\frac{c^2}{ac+b}+\frac{ac+c^2}{ac-b} &= \\
\frac{ac}{ac-b}+\frac{c^2}{ac+b}+\frac{c^2}{ac-b} &= \\
\frac{ac}{ac-b}+\frac{c^2(ac-b+ac+b)}{(ac-b)(ac+b)} &= \\
\frac{ac}{ac-b}+\frac{2ac^3}{(ac-b)(ac+b)}&.
\end{aligned}$$

Kohdat c ja d ovat siis oikein. Kun $a = 2$ ja $b = c = 1$, niin lausekkeen arvoksi saadaan

$$\frac{c}{a+\frac{b}{c}}+\frac{a+c}{a-\frac{b}{c}}=\frac{1}{2+\frac{1}{1}}+\frac{2+1}{2-\frac{1}{1}}=\frac{1}{2+1}+\frac{3}{2-1}=\frac{1}{3}+\frac{3}{1}=\frac{10}{3}\neq 0.$$

mutta

$$\frac{c(2bc+a^2c+ab)}{b^2-a^2c^2}=\frac{1(2\cdot 1\cdot 1+2^2\cdot 1+2\cdot 1)}{1^2-2^2\cdot 1^2}=\frac{2+4+2}{1-4}=\frac{8}{-3}<0.$$

Siis a ja b eivät tule kysymykseen.

P5. Tunnetun kolmosen jaollisuussäännön mukaan mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle m pätee $3 \mid m \Leftrightarrow 3 \mid S(m)$. Erityisesti kohta a on voimassa. Kohdan d ehto ei sen sijaan pidä paikkansa, pienin vastaesimerkki on $n = 2$: $7 \nmid S(14) = 5$. Kohtaan c on vastaesimerkki $n = 5$: pätee $S(10) = 1 < \frac{1}{2}S(5) = \frac{5}{2}$.

Kohdan b väite pätee, tässä on todistus.

Olkoon luvun n kymmenjärjestelmäesitys $n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^k a_k$, jolloin

$$S(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_k.$$

Olkoon vastaavasti luvun $2n$ kymmenjärjestelmäesitys $2n = b_0 + 10b_1 + 100b_2 + \ldots + 10^k b_k$. (Voidaan olettaa, että esityksissä on yhtä monta numeroa, jos sallimme esityksen alkamisen nollalla.) Huomataan, että numero b_i määräytyy numerosta a_i ja mahdollisesta edeltävästä numerosta a_{i-1} niin, että $b_i \equiv 2a_i \pmod{10}$, ellei $i > 0$ ja $a_{i-1} \geq 5$, jolloin $b_i \equiv 2a_i + 1 \pmod{10}$. Luvun $2n$ numeroiden summa määräytyy siis luvun n numeroista niin, että kukin numeroista tuplataan ja $S(2n)$:ään vaikuttaa tästä tuplasta ykkösosa ja mahdollinen muistinumero.

Huomataan siis, että jos luvussa n on jossakin kohdassa numero a, jolla $0 \leq a \leq 4$, niin se vaikuttaa luvun $2n$ numeroiden summaan $2a$ verran ja jos $5 \leq a \leq 9$, niin se vaikuttaa numeroiden summaan $2a - 9$ verran. Erityisesti vaikutus luvun $2n$ numeroiden summaan on enintään kaksinkertainen verrattuna vaikutukseen luvun n numeroiden summaan, joten

$$S(2n) \leq 2S(n).$$

P6. Yhtälöparin voi ratkaista. Ensimmäisen yhtälön voi kirjoittaa muotoon

$$64 = \frac{8^x}{2^{x+y}} = \frac{2^{3x}}{2^{x+y}} = 2^{2x-y}.$$

Koska $64 = 2^6$, saadaan tästä

$$2x - y = 6.$$

Vastaavasti toinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

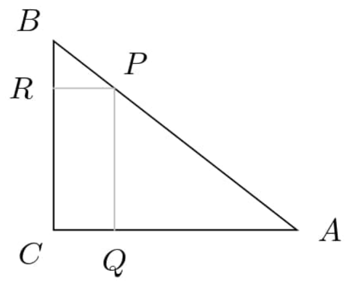
$$243 = \frac{9^{x+y}}{3^{4y}} = \frac{3^{2x+2y}}{3^{4y}} = 3^{2x-2y},$$

ja koska $243 = 3^5$, saadaan tästä

$$2x - 2y = 5.$$

Tästä yhtälöparista saadaan $x = 3{,}5$ ja $y = 1$, joten $2xy = 7$ on pariton positiivinen kokonaisluku. Täten c ja d ovat oikein ja muut väärin.

P7. Merkitään $c = |AB|$, $a = |BC|$ ja $b = |AC|$. Piirretään kuva, jossa on tehtävän suorakulmaisen kolmion ABC ja pisteen P lisäksi pisteen P kohtisuoran projektiot Q ja R kateeteille AC ja BC.



Kolmiot CAB, RPB ja QAP ovat yhdenmuotoisia, koska ne ovat kaikki suorakulmaisia ja niissä on pareittain yhteinen terävä kulma. Oletuksesta $|PB| : |PC| : |PA| = 1 : 2 : 3$ seuraa $|PB| : |AB| = 1 : 4$ ja $|AP| : |AB| = 3 : 4$, joten yhdenmuotoisuudesta saadaan

$$|RP| = |CQ| = \frac{1}{4}b \quad \text{ja} \quad |PQ| = \frac{3}{4}a.$$

Huomataan myös, että annetuista suhteista seuraa $|PC| = \frac{2}{1+3}c = c/2$. Soveltamalla Pythagoraan lausetta kahdesti suorakulmaisiin kolmioihin ABC ja CQP saadaan nyt

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{ja} \quad (b/4)^2 + (3a/4)^2 = (c/2)^2.$$

Veivaamalla tätä yhtälöparia saadaan ratkaisu:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ (b/4)^2 + (3a/4)^2 = (c/2)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ 9a^2 + b^2 = 4c^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 8a^2 = 3c^2 \\ 5a^2 - 3b^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{8}a = \sqrt{3}c \\ \sqrt{5}a = \sqrt{3}b. \end{cases}$$

Täten $a : b : c = \sqrt{3} : \sqrt{5} : \sqrt{8}$.

P8. Ideana on kertoa yhtälö auki ja ryhmitellä termejä uudelleen niin, että saadaan hyödyllisempi yhtälö.

$$\begin{aligned}
&(x + y + z)^2 = 3(xy + yz + zx) \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 3xy + 3xz + 3yz \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \\
&\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2xz + 2yz \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz - z^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Minkä tahansa (reaali)luvun neliö on vähintään nolla, joten yllä olevasta yhtälöstä saadaan $x - y = x - z = y - z = 0$, joten $x = y = z$.