Lukion matematiikkakilpailun välisarjan ratkaisuja 2013

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$-$
2.	$+$	$+$	$-$	$-$
3.	$+$	$-$	$-$	$-$

V1. Koska lukuja on $n > 1$ kappaletta ja niiden keskiarvo on M, niiden summa on nM. Kun a poistetaan, jäljelle jäävien summa on $nM - a$ ja keskiarvo

$$\frac{nM-a}{n-1} \neq \frac{M-a}{n-1},$$

kunhan $M \neq 0$ (kohta a väärin). Tämä on alkuperäistä pienempi, esimerkiksi jos luvut ovat $1, 2$ ja 3, joista 3 poistetaan (kohta b on oikein). Uuuden ja vanhan keskiarvon erotus on

$$\frac{nM-a}{n-1} - M = \frac{nM-a-(n-1)M}{n-1} = \frac{M-a}{n-1},$$

joten c on oikein. Uuden ja vanhan keskiarvon keskiarvo on

$$\frac{1}{2}\left(\frac{nM-a}{n-1} + M\right) = \frac{nM-a+(n-1)M}{2(n-1)} = \frac{(2n-1)M-a}{2(n-1)} \neq \frac{nM-a}{2(n-1)}.$$

kunhan $M \neq 0$ (kohta d väärin).

V2. Tunnetun kolmosen jaollisuussäännön mukaan mille tahansa positiiviselle kokonaisluvulle m pätee $3 \mid m \Leftrightarrow 3 \mid S(m)$. Erityisesti kohta a on voimassa. Kohdan d ehto ei sen sijaan pidä paikkansa, pienin vastaesimerkki on $n = 2$: $7 \nmid S(14) = 5$. Kohtaan c on vastaesimerkki $n = 5$: pätee $S(10) = 1 < \frac{1}{2}S(5) = \frac{5}{2}$.

Kohdan b väite pätee, tässä on todistus.

Olkoon luvun n kymmenjärjestelmäesitys $n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^k a_k$, jolloin

$$S(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_k.$$

Olkoon vastaavasti luvun $2n$ kymmenjärjestelmäesitys $2n = b_0 + 10b_1 + 100b_2 + \ldots + 10^k b_k$. (Voidaan olettaa, että esityksissä on yhtä monta numeroa, jos sallimme esityksen alkamisen nollalla.) Huomataan, että numero b_i määräytyy numerosta a_i ja mahdollisesta edeltävästä numerosta a_{i-1} niin, että $b_i \equiv 2a_i \pmod{10}$, ellei $i > 0$ ja $a_i \geq 5$, jolloin $b_i \equiv 2a_i + 1 \pmod{10}$. Luvun $2n$ numeroiden summa määräytyy siis luvun n numeroista niin, että kukin numeroista tuplataan ja $S(2n)$:ään vaikuttaa tästä tuplasta ykkösosa ja mahdollinen muistinumero.

Huomataan siis, että jos luvussa n on jossakin kohdassa numero a, niin luvussa $2n$ vastaavassa kohdassa on numero $2a$, jos $a = 0, 1, 2, 3$ tai 4 tai muuten numero $2a - 10 + 1 = 2a - 9$, jos $a = 5, 6, 7, 8$ tai 9. Erityisesti tämä numero on enintään kaksinkertainen luvun n numeroon verrattuna. Tästä seuraa, että

$$S(2n) \leq 2S(n).$$

V3. Oletusten mukaan yhtälön ratkaisut ovat $u - d, u$ ja $u + d$ joillakin luvuilla u ja $d \neq 0$. Käyttämällä polynomien nollakohtaesitystä saadaan

$$x^3 + 3ax^2 + bx + c = (x - (u - d))(x - u)(x - (u + d)).$$

Oikea puoli kerrottuna auki antaa

$$\begin{aligned} &x^3 - x^2((u - d) + u + (u + d)) + x((u - d)u + u(u + d) + (u - d)(u + d)) - (u - d)u(u + d) \\ &= x^3 - 3ux^2 + x(3u^2 - d^2) - (u^3 - ud^2). \end{aligned}$$

Vertailemalla kertoimia saadaan

$$a = -u,$$

$$b = 3u^2 - d^2$$

ja

$$c = -(u^3 - ud^2).$$

Tutkitaan sitten väitteitä.

Väite a: Laskemalla saadaan

$$ab = -3u^3 + ud^2$$

ja

$$2a^3 + c^3 = -3u^3 + ud^2,$$

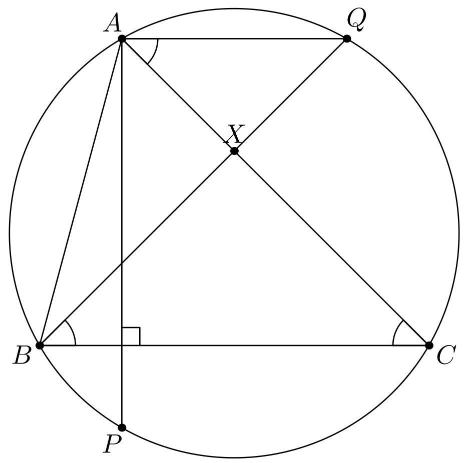
joten väite pätee.

Väite b: Esimerkiksi tapauksessa $u = d = 1$ väite ei päde. (Tämä vastaa polynomia $x(x - 1)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.)

Väite c: Esimerkiksi tapauksessa $u = d = 1$ väite ei päde, koska tällöin $3a + c = -3$ ja $2b = 4$.

Väite d: Esimerkiksi tapauksessa $u = d = 1$ väite ei päde, koska tällöin $b = 2$ ja $3ac = 3 \cdot (-1) \cdot 0 = 0$.

V4. Piirretään kuva tilanteesta.



Koska oletetaan, että $|BX| = |CX|$, niin kolmio BCX on tasakylkinen ja sen kantakulmat ovat yhtä suuret. Siis

$$\angle ACB = \angle XCB = \angle XBC = \angle QBC = \angle QAC,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret. Koska suora AC leikkaa suoria AQ ja BC niin, että $\angle ACB = \angle QAC$, niin $AQ \parallel BC$. Koska AP on kohtisuorassa sivua BC vastaan, niin se on kohtisuorassa myös janaa AQ vastaan, joten kehäkulma PAQ on suora. Kehäkulmaa vastaava keskuskulma on siis oikokulma, joten PQ on ympyrän S halkaisija.

V5. Nimetään laudan pisteet niin, että laudan keskipisteiden koordinaatit ovat muotoa (x, y), missä x ja y ovat kokonaislukuja väliltä $0 \le x, y \le 2012$.

Todetaan ensiksi, että voimme siirtää kaikki neljä nappulaa 2×2 -neliön muodostelmaan laudan vasempaan alakulmaan.[1]

Todetaan sitten, että voimme kiertää tämän 2×2 -neliön nappuloita 90 astetta. Nimetään nappulat niin, että alemmalla rivillä on nappulat a ja b ja ylemmällä rivillä d ja c (luettuna vasemmalta oikealle). Siirretään nappuloita seuraavasti:

$$\begin{aligned}
b : (1,0) \to (2012,0), a : (0,0) \to (2011,0) \to (2011,2012),\\
d : (0,1) \to (0,0), c : (1,1) \to (0,1),\\
b : (2012,0) \to (1,0) \to (1,2012),\\
a : (2011,2012) \to (2011,0) \to (1,0) \text{ ja}\\
b : (1,2012) \to (1,1).
\end{aligned}$$

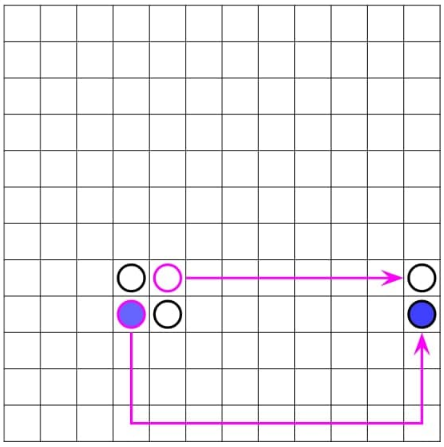
Tässä perusastelemassa siis sinisen nappulan voi olettaa olevan missä vain neljästä mahdollisesta ruudusta.

[1]Hieman perusteluja sille, miten tämä tehdään: Valitaan ensiksi se nappula, jonka x-koordinaatti on pienin ja jos vaihtoehtoja on monia niistä se, jonka y-koordinaatti on pienin. Siirretään sitä alas ja vasemmalle. Valitaan sitten muista nappuloista se, jonka x-koordinaatti on pienin ja jos vaihtoehtoja on monia taas se, jonka y-koordinaatti on pienin. Siirretään sitä taas alas ja vasemmalle, jolloin se päätyy joko pisteeseen $(1, 0)$ tai $(0, 1)$. Ei ole vaikea nähdä, että loput kaksi nappulaa saadaan siirrettyä täydentämään 2×2 -neliö.

Osoitetaan vielä, että tämä 2×2 -asetelma voidaan siirtää aina yhden ruudun verran oikealle tai ylöspäin, jos vain laudan reuna ei tule vastaan. Oletetaan, että nappulat ovat ruuduissa $a : (x, y), b : (x + 1, y), c = (x + 1, y + 1)$ ja $d : (x, y + 1)$. Symmetrian vuoksi riittää tarkastella oikealle siirtämistä, jolloin oletetaan, että $x \geq 2010$. Käsitellään ensiksi tapaus $y > 0$ ja käsitellään erikoistapaus $y = 0$ myöhemmin.

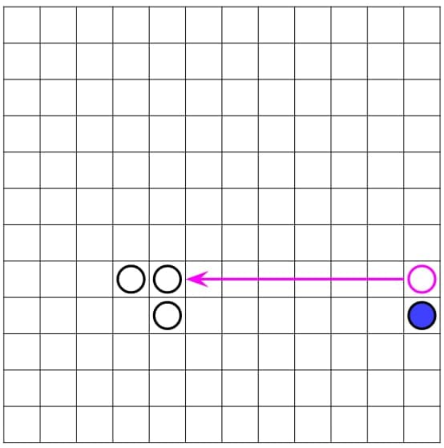
Siirretään ensin nappulat a ja c pysäyttimiksi laudan reunaan (kuvan esimerkissä on tehtävän lautaa hieman pienempi lauta):

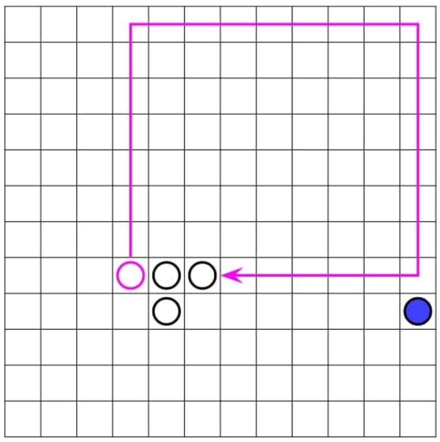
$$c : (x + 1, y + 1) \to (2012, y + 1) \text{ ja } a : (x, y) \to (x, 0) \to (2012, 0) \to (2012, y).$$



Järjestellään ylärivi:

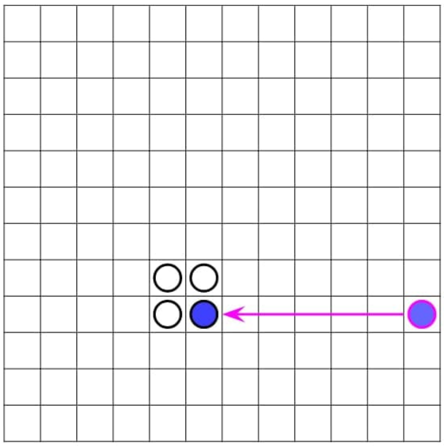
$$c : (2012, y + 1) \to (x + 1, y + 1),$$
$$d : (x, y + 1) \to (x, 2012) \to (2012, 2012) \to (2012, y + 1) \to (x + 2, y + 1),$$





jonka jälkeen asetelma saadaan kasaan:

$$a : (2012, y) \to (x + 2, y).$$



Erikoistapaus $y = 0$ on helppo, sillä silloin voidaan siirtää

$$\begin{aligned}
&d : (x, 1) \to (x, 2012) \to (2012, 2012) \to (2012, 0)\\
&a : (x, 0) \to (x, 2012) \to (2012, 2012) \to (2012, 1) \to (x + 2, 1) \text{ ja}\\
&d : (2012, 0) \to (x + 2, 1)
\end{aligned}$$

Edellä todistetusta seuraa, että mikä tahansa laudan ruutu voi tulla nappulan valloittamaksi niin, että nappula on osa 2×2 -asetelmaa. Koska sininen nappula voi perusasetelmassa olla mikä neljästä nappulasta tahansa, sininenkin nappula pääsee mihin hyvänsä ruuduista.

V6. Kerrotaan yhtälö ensiksi auki kertomalla puolittain luvulla $12mn$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}\\
&\Leftrightarrow 12n + 48m = mn\\
&\Leftrightarrow mn - 12n - 48m = 0.
\end{aligned}$$

Avainidea on “täydentää suorakulmioksi” (vertaa neliöksi täydentämiseen) pakottamalla tekijöihinjako:

$$mn - 12n - 48m = (m - 12)(n - 48) - 12 \cdot 48.$$

Täten yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$(m - 12)(n - 48) = 12 \cdot 48 = 576.$$

Siis $n - 48 \mid 576 = 9 \cdot 64$, mutta koska n ja $n - 48$ ovat parittomia, saadaan $n - 48 \mid 9$ ja erityisesti $|n - 48| \leq 9$. Täten $|m - 12| \geq 576/9 = 64$ ja $m > 0$, tulee olla $m - 12 > 0$ ja täten myös $n - 48 > 0$.

Ratkaisut saadaan siis valitsemalla $n - 48$ olemaan yksi luvuista $1, 3$ ja 9 ja sitten valitsemalla m niin, että $(m - 12)(n - 48) = 576$. Tästä saaadaan ratkaisut

$$(n, m) = (49, 588), (51, 204), (57, 76).$$