Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2014

A1. Tehtävänanto siis kertoo, että luvut $x + \sqrt{x^2+1}$ ja $y + \sqrt{y^2+1}$ ovat toistensa käänteislukuja. Toisaalta tunnetulla tempulla saadaan lavennettua

$$\begin{aligned}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1} &=\\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} &=\\ \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)} &=\\ \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2} &= \sqrt{x^2+1}-x.\end{aligned}$$

Täten myös $\sqrt{x^2+1}-x$ on luvun $x+\sqrt{x^2+1}$ käänteisluku, eli $\sqrt{x^2+1}-x = y+\sqrt{y^2+1}$. Täten haluttu summa $x+y$ on

$$x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}.$$

Toisaalta symmetrian nojalla pätee myös

$$x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1},$$

eli pitää päteä $x+y=0$.

A2. Kaksimoottorinen kone pystyy lentämään todennäköisyydellä $1-p^2$. Nelimoottorinen kone ei pysty lentämään, jos “kaikki moottorit vikaantuvat”, “kolme moottoria vikaantuu ja yksi ei” tai jos “kaksi saman puolen moottoria vikaantuu, mutta toisen puolen moottorit eivät”. Tästä saadaan laskettua, että nelimoottorinen kone pystyy lentämään todennäköisyydellä

$$1-p^4-4p^3(1-p)-2p^2(1-p)^2.$$

Kertomalla auki ja sieventämällä tämä saadaan muotoon

$$1+p^4-2p^2.$$

Tutkitaan sitten, milloin kaksimoottorinen kone on turvallisempi. Tämä pätee, jos

$$1-p^2>1+p^4-2p^2$$

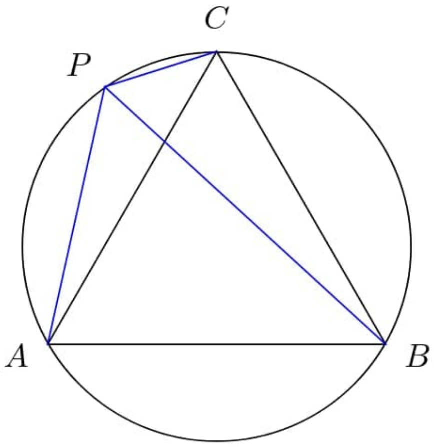
eli jos

$$p^2>p^4.$$

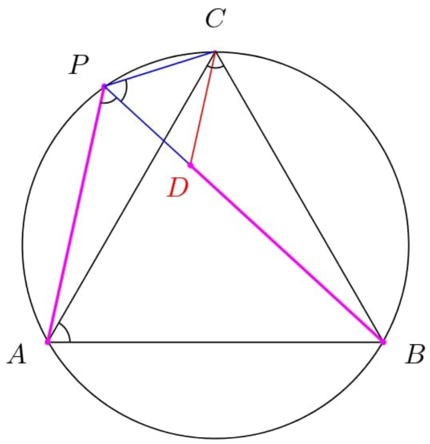
Tämä pätee kaikilla $0<p<1$.

Täten kaksimoottorinen kone on turvallisempi kaikilla p, joilla $0<p<1$. Jos $p=0$ tai $p=1$, koneet ovat yhtä turvallisia.

A3.



Valitaan janalta PB sellainen piste D, jolla $PA = BD$. Tavoitteena on osoittaa, että $PC = PD$, mistä saadaan haluttu väite $PB = PA + PC$.



Todistus perustuu seuraavaan väitteeseen: kolmiot DBC ja PAC ovat yhteneviä.

Väitteen todistus: Pätee $DB = PA, BC = AC$ ja kehäkulmalauseella $\angle PAC = \angle DBC$, joten väite seuraa sks-yhtenevyyssäännöllä.

Ratkaisun viimeistely: Yhtenevyyden nojalla $PC = CD$, joten $\angle PDC = \angle CPD = 60°$, joten PCD on tasasivuinen kolmio. Erityisesti $PD = PC$, joten

$$PB = PD + DB = PC + PA,$$

mikä on haluttu väite.

Kommentti. Ratkaisun pisteen D lisääminen kuvioon voi tuntua taikatempulta, mutta taustalla on luonteva idea.

Jos tehtävänannon väite pätee, niin janalla PB on sellainen piste D, joka jakaa janan osiin, joiden pituudet ovat PC ja PA. Tällöin nähdään, että PCD tosiaan on tasasivuinen kolmio, koska se on tasakylkinen ja siinä on 60 asteen kulma.

On luontevaa yrittää tehdä päättely toiseen suuntaan: lisätään kuvioon piste D ja yritetään sitten todistaa, että tällä pisteellä D on halutut mielenkiintoiset ominaisuudet. (Haluttujen ominaisuuksien todistamiseksi puolestaan hyödynnytetään tiedossa olevia pituusehtoja yhtenevien kolmioiden kautta.)

A4. Risto pystyy varmistamaan, että millä tahansa ajanhetkellä lautasilla on *yhteensä* enintään $\ell - 1$ rusinaa. Tämä tietysti riittää väitteen todistamiseksi.

Riston strategia on tehdä mahdollisista kahdesta siirrosta se, jonka jälkeen lautasilla on yhteensä vähemmän rusinoita. Osoitetaan, että kun Risto pelaa näin, hän saa pidettyä lautasilla olevien rusinoiden yhteismäärän olemaan aina enintään $\ell - 1$.

Tutkitaan tilannetta, jossa Laura on jakanut lautaset niin, että vasemmalla puolella on a lautasta, joilla on A rusinaa ja toisella puolella on b lautasta, joilla on B rusinaa ja oletetaan että Risto on toistaiseksi pystynyt pitämään rusinoiden yhteismäärän $A+B$ pienempänä kuin ℓ, eli $A+B \leq \ell-1$. Lautasia on yhteensä $a+b=\ell$. Ristolla on kaksi vaihtoehtoa: hän voi tyhjentää vasemman puolen lautaset ja lisätä oikean puolen lautasille rusinat, jolloin siirron jälkeen lautasille jää yhteensä

$$b+B$$

rusinaa. Toinen siirto johtaa siihen, että lautasilla on

$$a+A$$

rusinaa. Vähintään toinen näistä rusinamääristä on enintään $\ell - 1$, koska muuten pätisi $a+b+A+B \geq 2\ell$, mikä on ristiriidassa ehtojen $a+b=\ell$ ja $A+B \leq \ell - 1$ kanssa.