Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2014

	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$+$	$-$
2.	$+$	$+$	$-$	$-$
3.	$+$	$-$	$+$	$+$
4.	$-$	$-$	$-$	$-$
5.	$-$	$+$	$-$	$-$
6.	$+$	$-$	$+$	$-$

P1. Olkoot aluksi junan nopeus (liikkeellä) v_0 ja matka-aika T_0. Matkan pituus s on tietenkin muuttumaton. Koska matka-ajasta 5% kuluu aluksi pysähdyksiin, saadaan

$$v_0 = \frac{s}{(1-0{,}05)T_0} = \frac{s}{0{,}95T_0}.$$

Junan nopeudeksi tulee muutoksen jälkeen v_1 ja uudeksi matka-ajaksi saadaan

$$T_1 = \frac{s}{v_1} + 0{,}05T_0.$$

Jotta pätisi $T_1 = 0{,}90T_0$, täytyy olla

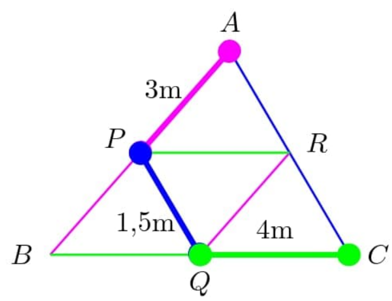
$$0{,}9T_0 = \frac{s}{v_1} + 0{,}05T_0 \Leftrightarrow 0{,}85T_0 = \frac{s}{v_1} \Leftrightarrow v_1 = \frac{s}{0{,}85T_0},$$

joten

$$\frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{s/(0{,}85T_0) - s/(0{,}95T_0)}{s/(0{,}95T_0)} = \frac{1/0{,}85 - 1/0{,}95}{1/0{,}95}$$
$$= 0{,}95/0{,}85 - 1 = 0{,}1/0{,}85 = 11{,}8\%.$$

Siis kohta c on oikein.

P2.



Koska kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävä jana on puolet kolmion kolmannesta sivusta (yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella), kukin kolmesta merkitystä pituudesta esiintyy rakennelmassa tasan kolmesti. Tankoa kuluu siis $3 \cdot (1{,}5\text{m} + 3\text{m} + 4\text{m}) = 25{,}5\text{m}$. Kohdat a ja b ovat oikein.

P3. Ensiksi havaitaan, että jos $a = b$, niin

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 : \left(\frac{2}{a}\right) = a = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{ab}.$$

Siis kohdat a ja c ovat mahdollisia. Toinen esimerkki osoittaa, että myös kohdan d epäyhtälö on mahdollinen: jos $a = 1$ ja $b = 4$, niin

$$2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 : \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) = 2 : \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{8}{5} < 2 = \sqrt{1 \cdot 4}.$$

Tutkitaan vielä kohdan b epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}
&2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > \sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow 2ab : (b + a) > \sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow 4a^2b^2 : (a + b)^2 > ab \\
&\Leftrightarrow 4ab : (a + b)^2 > 1 \\
&\Leftrightarrow 4ab > (a + b)^2 \\
&\Leftrightarrow 4ab > a^2 + 2ab + b^2 \\
&\Leftrightarrow 0 > a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,
\end{aligned}$$

mikä on mieletöntä. (Huomaa, että neliöönkorotus säilytti epäyhtälön suunnan, koska luvut olivat positiivisia.) Siis kohdan b tilannetta ei voi toteuttaa.

Huomautus: Luku $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ on nimeltään lukujen a ja b *harmoninen keskiarvo*, $\sqrt{ab}$ vastaavasti *geometrinen keskiarvo*. Harmonisen ja geometrisen keskiarvon suuruusjärjestys oli tunnettu jo vanhalla ajalla osana ns. babylonialaista epäyhtälöketjua.

P4. Mikään tarjotuista vaihtoehdoista ei pidä paikkaansa, mikä todetaan tunnettuja jaollisuussääntöjä käyttäen: Merkitään kokonaisluvun N viimeistä numeroa v:llä, numeroiden summaa s:llä ja vuorottelevaa summaa a:lla. Huomataan, että viimeinen numero $v = 1$ ei ole viidellä jaollinen eikä numeroiden summa $s = 25 \cdot (9 + 7 + 5 + 3 + 1) = 25 \cdot 25$ edes kolmella jaollinen, joten kohdat a, b ja c ovat väärin. Vuorottelevaksi summaksi saadaan $a = 25 \cdot (0 - 9 + (7 - 5) + (3 - 1)) = 25 \cdot (-5)$, mikä ei ole 11:llä jaollinen. Siis myöskään d ei päde.

P5. Tarkastellaan hieman yleisempää tilannetta: Oletetaan, että laskun suuruus on $0{,}1n$ euroa, missä n on positiivinen kokonaisluku. Laskun voi tietenkin maksaa täsmälleen yhdellä tavalla vain viiden sentin kolikoita käyttäen, nimittäin $2n$ viiden sentin kolikolla. Jos käytettävissä on sekä viiden että kymmenen sentin kolikoita, niin tapoja maksaa $0{,}1n$ euron lasku on $n + 1$ kappaletta: käytetään k kymmenen sentin kolikkoa ja $2(n - k)$ viiden sentin kolikkoa, missä $0 \leq k \leq n$, k on kokonaisluku.

Edelleen jos käytettävissä on vain $5, 10$ ja 20 sentin kolikot, niin erilaisten maksutapojen määrän voi laskea sen mukaan, kuinka monta 20 sentin kolikkoa käytetään. Jos k on laskun maksamiseen käytettyjen 20 sentin kolikoiden lukumäärä, niin $0{,}2k \le 0{,}1n$ eli $k \le \lfloor n/2 \rfloor$ (missä $\lfloor n/2 \rfloor$ on $n/2$ pyöristettynä alaspäin), ja maksettavaksi jää vielä $0{,}1 \cdot (n-2k)$ euroa, josta jo tiedetään, miten monella tavalla sen voi maksaa viiden ja kymmenen sentin kolikoiolla. Tapoja on kaikkiaan

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n-2k+1).$$

Sovelletaan saatuja tuloksia alkuperäiseen tehtävään. Maksussa voi käyttää $0, 1$ tai 2 viidenkymmenen sentin kolikkoa. Jos 50 sentin kolikoita ei käytetä lainkaan, niin maksun voi maksaa edellisen kaavan mukaan $11+9+7+5+3+1 = 36$ tavalla. Yhtä 50 sentin kolikkoa käytettäessä tapoja maksaa loput 50 senttiä muunlaisilla kolikoilla on $6+4+2 = 12$ kappaletta. Lopuksi jää vielä mahdollisuus maksaa euron lasku kahdella 50 sentin kolikolla. Eri tapoja on siis $36+12+1 = 49$ ja ainoastaan kohta b on oikein.

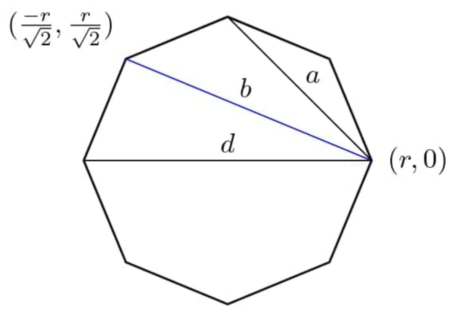
P6. Merkitään $P(x) = (3x-1)^7 = a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x^1+a_0$. Saadaan

$$\begin{aligned}
a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 &= \\
(a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0) - a_0 &= \\
P(1) - P(0) = (3 \cdot 1 - 1)^7 - (0-1)^7 = 2^7 - (-1) = 128 + 1 = 129&.
\end{aligned}$$

Siis kohdat a ja c ovat oikein ja muut väärin.

P7. Säännöllisellä kahdeksankulmiolla on kolmen pituisia lävistäjiä: kahden, kolmen ja neljän sivun murtoviivaa vastaavat. Pisimmät näistä ovat myös vastaavan ympyrän halkaisijoita ja niiden yhteinen pituus on siis $d = 2r$. Lyhyimmät ovat tarkasteltavan ympyrän sisään piirretyn neliön sivuja, ja niiden pituus a saadaan Pythagoraan lauseella:

$$a^2 = r^2 + r^2 \implies a = r\sqrt{2}.$$



Kolmannen lävistäjänpituuden selvittämiseksi asetetaan säännöllinen kahdeksankulmio koordinaatistoon niin, että symmetriakeskipiste on origossa ja yksi kärjistä pisteessä $(r, 0)$.

Huoamtaan, että kuvan b-pituisen lävistäjän toinen päätepiste sijaitsee etäisyydellä r origosta 45 asteen kulmassa, joten sen koordinaatit ovat $(-r/\sqrt{2}, r/\sqrt{2})$. Täten

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{(r-(-r/\sqrt{2}))^2+(0-r/\sqrt{2})^2} \\
&= r\sqrt{\left((\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}\right)^2+(1/\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{r}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1} \\
&= \frac{r}{2}\sqrt{n+2\sqrt{2}+1+1} \\
&= r\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Vastaus: Säännöllisen monikulmion lävistäjien pituudet ovat $r\sqrt{2}, r\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ ja $2r$.

P8. Esitetään kaksi eri ratkaisua. Ensimmäinen on suoraviivainen, toinen on elegantti.

Tapa 1: Todetaan ensiksi, että k karamellia pitäisi jakaa vain kahden henkilön kesken, tapoja olisi $k+1$: ensimmäiselle henkilölle annetaan $0, 1, 2, \ldots, k-1$ tai k karkkia ja toiselle loput.

Tutkitaan sitten tapauksittain tehtävän jakojen määriä, kun A:lle annetaan $0, 1, 2, \ldots, n$ karkkia. Jos henkilölle A annetaan k karkkia, on edellisen nojalla tapojen määrä jakaa loput $n-k$ karkkia B:lle ja C:lle $n-k+1$. Täten haluttu tapojen määrä on

$$(n+1)+n+(n-1)+\ldots+2+1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

Tapa 2: Jako voidaan tehdä seuraavasti: Jakajalla on n karamellin lisäksi kaksi jakomerkkiä. Hän asettaa nämä $n+2$ kappaletta riviin, jolloin A saa vasemmanpuoleisen jakomerkin vasemmalle puolelle jääneet karamellit, B jakomerkkien väliin jäävät karamellit ja C loput. Tapoja on siis yhtä paljon kuin on tapoja valita $n+2$ paikasta jakomerkeille kaksi paikkaa, eli

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}.$$

Huomautus: Jälkimmäinen tapa yleistyy suoraan ongelman variantteihin, joissa karamellit pitää jakaa kolmen sijasta useammalle henkilölle. Esimerkiksi neljällä henkilöllä saadaan vastaavasti, että tapoja on $\binom{n+3}{3}$.