Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2015

A1. Symmetrian takia voidaan tutkia tapausta, jossa $b = a + 1$. a-kohdan väitettä varten yritetään kirjoittaa d:n lauseke jonkin lausekkeen neliöksi.

Kerrotaan ensiksi d:n lauseke auki:

$$\begin{aligned} d &= a^2 + (a+1)^2 + (a(a+1))^2 \\ &= a^2 + (a^2 + 2a + 1) + (a^4 + 2a^3 + a^2) \\ &= a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1. \end{aligned}$$

Huomataan, tämä on polynomin $a^2 + a + 1$ neliö:

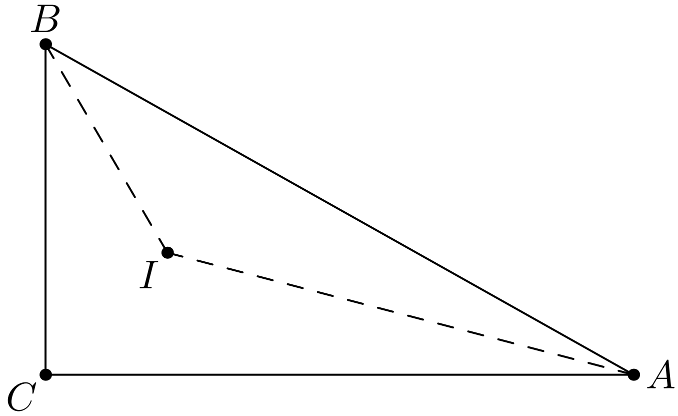
$$(a^2 + a + 1)^2 = (a^2 + a)^2 + 2(a^2 + a) + 1 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1.$$

Täten $\sqrt{d} = a^2 + a + 1$ on kokonaisluku. (Huomaa, että $a^2 + a + 1$ on positiivinen, kun a on kokonaisluku.)

Selvästikin $a^2 + a + 1$ on pariton, koska $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$. Täten $\sqrt{d}$ on pariton.

Kommentti. Sen, että $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ on polynomin $a^2 + a + 1$ voi keksiä seuraavasti: Jos $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ on polynomin $P(a)$ neliö, niin huomataan, että polynomin P asteen tulee olla 2. Lisäksi vertailemalla kertoimia huomataan, että $P(a)$:n vakiotermin pitää olla 1 tai -1. Vastaavasti myös sen termin a^2 kertoimen pitää olla 1 tai -1. Vielä lisää vertailemalla tai kokeilemalla huomataan, että $P(a) = a^2 + a + 1$ käy.

A2. Tehtävään on monenlaisia ratkaisuja. Suoraviivaisin lienee seuraava kosinilauseen pohjautuva ratkaisu.



Olkoon kolmio ABC, missä C on suoran kulman kärki, ja olkoon I kolmion sisäympyrän keskipiste. Tunnetusti I on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Jos merkitään $\angle BAC = \alpha$ ja $\angle CBA = \beta$, niin $\alpha + \beta = 90°$, ja kolmion AIB kulmat ovat $\alpha/2, \beta/2$ ja

$$\angle AIB = 180° - \alpha/2 - \beta/2 = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180° - 45° = 135°.$$

Nyt kosinilauseen nojalla

$$AB^2 = 4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos(135°) = 20 + 16 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 20 + 8\sqrt{2},$$

joten

$$AB = \sqrt{20 + 8\sqrt{2}} = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

A3. Ehto on sama kuin sanoittaisiin, että joukon A pienimpien 21 luvun summa on suurempi kuin suurimman 20 luvun summa.

Olkoot siis joukon A luvut $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{41}$. ($A$ on joukko, joten määritelmällisesti sen alkiot ovat eri lukuja.) Tiedämme, että

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{21} > x_{22} + \ldots + x_{41}.$$

Jos x_1 olisi negatiivinen, niin olisi

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{21} < x_2 + \ldots + x_{21} < x_{22} + \ldots + x_{41},$$

mikä ei käy. Siis joukossa A ei ole negatiivisia lukuja.

A4. Ratkaisu perustuu rekursiiviseen päättelyyn. Olkoon $f(n)$ niiden n kirjaimen jonojen määrä, joissa on parillinen määrä A-kirjaimia ja $g(n)$ niiden n kirjaimen jonojen määrä, joissa on pariton määrä A-kirjaimia.

Ensinnäkin pätee $f(n) + g(n) = 3^n$, koska n merkin jonoja on yhteensä 3^n kappaletta.

Toisekseen pätee

$$f(n) = 2f(n-1) + g(n-1)$$

ja

$$g(n) = 2g(n-1) + f(n-1).$$

Nimittäin jos n-merkin jonossa on parillinen määrä A-kirjaimia, niin joko sen ensimmäisessä $n-1$ merkissä on parillinen määrä kirjaimia ja viimeinen merkki on B tai C (mistä saadaan $2f(n-1)$ merkkijonoa) tai sen ensimmäisessä $n-1$ merkissä on pariton määrä A-kirjaimia ja viimeinen merkki on A (mistä saadaan $g(n-1)$ merkkijonoa). Tämä perustelee ensimmäisen yhtälön. Toinen yhtälö perustellaan vastaavasti.

Laskemalla pieniä tapauksia huomataan, että vaikuttaa pätevän $f(n) = g(n) + 1$ kaikilla n. Tämän saa perusteltua yllä olevilla rekursioyhtälöillä:

$$f(n) - g(n) = (2f(n-1) + g(n-1)) - (2g(n-1) + f(n-1)) = f(n-1) - g(n-1),$$

eli jono $f(n) - g(n)$ on vakio, ja koska $f(1) - g(1) = 2 - 1 = 1$, niin $f(n) - g(n) = 1$ kaikilla n.

Yhtälöparista $f(n) + g(n) = 3^n$ ja $f(n) - g(n) = 1$ saadaan nyt ratkaistua

$$f(n) = \frac{3^n + 1}{2}.$$