Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2015

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$-$	$-$
2.	$-$	$+$	$-$	$-$
3.	$-$	$-$	$-$	$-$
4.	$+$	$-$	$+$	$-$
5.	$+$	$-$	$+$	$+$
6.	$+$	$+$	$+$	$-$

P1. Olkoon liukuhihnan pituus a. Jos hihna ei liiku, hiirellä päästä toiseen ja takaisin liikkumiseen kuluva aika on $\frac{2a}{v}$. Kun hihna on päällä, hiiren nopeus liikkuessa samaan suuntaan kuin hihna on $u+v$ ja eri suuntaan mentäessä $u-v$, joten kuluva aika on

$$\frac{a}{u+v}+\frac{a}{u-v}.$$

Todistetaan, että kun $0<v<u$, on tämä matka-aika pidempi kuin jos hihna ei liikkuisi eli että

$$\frac{a}{u+v}+\frac{a}{u-v}>\frac{2a}{v},$$

kun $0<v<u$. Jaetaan puolittain luvulla a ja kerrotaan puolittain nimittäjien tulolla $(u+v)(u-v)v$. Saadaan yhtäpitävä epäyhtälö

$$u(u-v)+u(u+v)>2(u+v)(u-v),$$

joka sievenee muotoon $0>-2v^2$, joka selvästi pätee. Täten b on oikein ja muut väärin.

P2. Sellaista ei ole olemassa. Avoin väli $]1,2[$ on esimerkki lukujoukosta, jossa ei ole pienintä (eikä suurinta) lukua. Siis b on oikein ja muut väärin. (Voidaan myös päätellä, että a ei tietysti käy, koska 1 ei kuulu välille, c ei käy (koska esimerkiksi $1+10^{-100}$ on vielä pienempi välin luku.)

P3. Suora jakaa neliön tasakylkiseksi suorakulmaisen kolmioksi ja viisikulmioksi. Olkoon tämän kolmion kateetin pituus on b, jolloin

$$\frac{1}{2}b^2=\frac{a^2}{5}$$

eli $b=\sqrt{2}a/\sqrt{5}$. Hypotenuusan pituus on täten

$$\sqrt{2}b=\frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Käymällä vaihtoehdot läpi huomataan, ettei mikään annetuista vaitoehdoista ole oikea.

P4. Seuraavan jäsenen viimeinen numero riippuu ainoastaan edellisen jäsenen viimeisestä numerosta. Jos siis merkitään y_n:llä luvun x_n viimeistä numeroa, niin jono $y_0, y_1, \ldots$ alkaa

$$5, 6, 7, 0, 1, 2, 5, 6, \ldots$$

Jono on siis jaksollinen jaksolla 6. Luku 2015 asettuu kohtaan 5 tässä jaksossa, koska $2015 - 5 = 2010 = 6 \cdot 335$ on jaollinen kuudella. Täten $y_{2015} = y_5 = 2$, eli vastaus on 2. Täten a ja c ovat oikein ja b ja d väärin.

P5. a-kohta saadaan muistikaavalla $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$:

$$\begin{aligned}
&(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \\
&(a+(b-c))(a-(b-c))(-a+b+c) = \\
&(a^2-(b-c)^2)(-a+b+c).
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned}
&(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \\
&(a+b-c)(c+(a-b))(c-(a-b)) = \\
&(a+b-c)(c^2-(a-b)^2),
\end{aligned}$$

joka on $-(a+b-c)((a-b)^2-c^2)$, eli b-kohta on väärin. (Huomaa, että $(a+b-c)(c^2-(a-b)^2)$ voi olla nollasta eroava, kuten esimerkiksi tapauksessa $a = b = 0, c = 1$.)

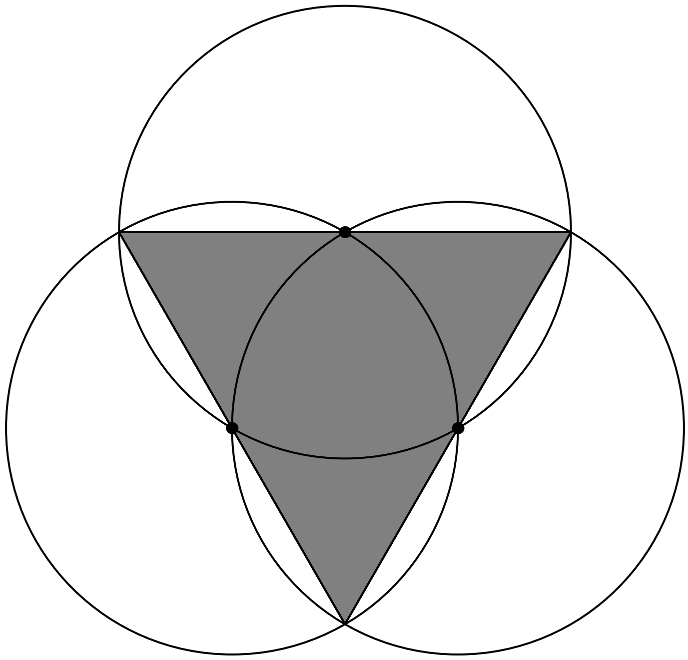
Kertomalla auki saadaan laskettua, että c-kohta on oikein. Tämän voi päätellä myös seuraavasti: auki kerrotussa versiossa kunkin termin asteeksi tulee 3. Lisäksi koska $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ on symmetrinen muuttujien a, b ja c suhteen myös lopputulos on. Riittää siis päätellä, mitkä ovat termien a^3, a^2b ja abc kertoimet. Termi a^3 saadaan valitsemalla ensimmäisestä tulontekijästä a, toisesta a ja kolmannesta $-a$, joten kertoimeksi tulee -1. Termi a^2b saadaan valitsemalla yhdestä tekijästä b ja kahdesta muusta a. Kolme vaihtoehtoa $a \cdot a \cdot b, a \cdot (-b) \cdot (-a)$ ja $b \cdot a \cdot (-a)$ antavat kertoimien summaksi $1 + 1 - 1 = 1$. Termin abc saa muodostettua kuudella tavalla, joista neljä antaa kertoimeksi -1 ja kaksi kertoimeksi 1.

d-kohta on oikein, mikä nähdään kertomalla $(a+b+c)^3$ auki ja vertaamalla d-kohdan lauseketta c-kohtaan. Auki kerrotun lopputuloksen voi myös päätellä kuten yllä: termi a^3 saadaan yhdellä tavalla tulosta $(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$, kun taas a^2b saadaan kolmella tavalla ja abc saadaan kuudella tavalla. Täten

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc,$$

mistä nähdään d-kohdan lausekkeen olevan sama kuin c-kohdan.

P6.



Ulkoreuna koostuu kolmesta puoliympyrästä, joten

$$p = 3\pi r$$

eli b on oikein.

Kuvio koostuu kolmesta puoliympyrästä ja tasasivuisesta kolmiosta jonka kanta on $2r$ ja korkeusjana $\frac{\sqrt{3}}{2}2r$, joten

$$A = 3 \cdot \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 = \left(\frac{3\pi}{2} + \sqrt{3}\right) r^2.$$

Täten d on väärin.

Kohdan a epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\frac{3\pi}{2} + \sqrt{3} < 9\pi^2$$

kanssa. Tämä pätee, koska $3\pi/2 + \sqrt{3} < 3 \cdot 4/2 + 2 = 8 < 9 < 9\pi^2$.

Kohta c niin ikään pätee, koska $3\pi/2 + \sqrt{3} > 3 \cdot 3/2 + 1{,}5 = 6$.

P7. Olkoot a ja b tällaisia lukuja. Tiedetään, että a ja b ovat jaollisia 18:lla ja niiden summa on $162 = 9 \cdot 18$. Jos siis kirjoitetaan $a = 18x$ ja $b = 18y$, niin $x + y = 9$, eli (x, y) on jokin pareista

$$(1,8), (2,7), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3), (7,2), (8,1).$$

Jotta lukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 18, tulee päteä $\mathrm{syt}(x, y) = 1$. Tämä poissulkee parit $(3,6)$ ja $(6,3)$. Tästä, että ratkaisut ovat

$$\{a, b\} = \{18, 144\}, \{36, 126\}, \{72, 90\},$$

missä luvut voivat olla kummin päin tahansa.

P8. Riittää todistaa, että $a^{n+4} - a^n$ on jaollinen sekä kahdella että viidellä. Koska a^n ja a^{n+4} ovat molemmat samaa parillisuutta kuin a, on kahdella jaollisuus selvää.

Viidellä jaollisuutta varten huomataan tekijöihinjako

$$a^{n+4} - a^n = a^n(a^4 - 1) = a^n(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^n(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1).$$

Jos $a \equiv 0 \pmod 5$ eli a on jaollinen viidellä, niin a^n on jaollinen viidellä. Jos $a \equiv 1 \pmod 5$, niin $a - 1$ on jaollinen vidiellä. Jos $a \equiv 2 \pmod 5$ tai $a \equiv 3 \pmod 5$, niin $a^2 + 1$ on jaollinen viidellä. Jos $a \equiv 4 \pmod 5$, niin $a + 1$ on jaollinen viidellä. Tämä kattaa kaikki tapaukset, joten $a^{n+4} - a^n$ on aina jaollinen viidellä.

Huomautus: Viidellä jaollisuutta varten voi myös suoraan laskea eri lukujen (mod 5) potensseja ja tutkia niiden jaksollisuutta. Riittää nimittäin tarkistaa, että jakson pituudet ovat aina luvun 4 tekijöitä. Luvuilla 0 ja 1 jakson pituus on yksi, luvulla 4 jakson pituus on kaksi ja luvuilla 2 ja 3 jakson pituus ovat neljä.