Lukion matematiikkakilpailun välisarjan ratkaisuja 2015

	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$-$	$-$
2.	$-$	$+$	$-$	$+$
3.	$-$	$+$	$-$	$-$

V1. Suora jakaa neliön tasakylkiseksi suorakulmaisen kolmioksi ja viisikulmioksi. Olkoon tämän kolmion kateetin pituus on b, jolloin

$$\frac{1}{2}b^2 = \frac{a^2}{5}$$

eli $b = \sqrt{2}a/\sqrt{5}$. Hypotenuusan pituus on täten

$$\sqrt{2}b = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Käymällä vaihtoehdot läpi huomataan, ettei mikään annetuista vaitoehdoista ole oikea.

V2. Jos $p = 2$, niin $2013 = qrs$. Luvun 2013 alkutekijähajotelmaksi saadaan laskettua $2013 = 3 \cdot 671 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Tästä saadaan yksi ratkaisu $p = 2, q = 3, r = 11, s = 61$.

Jos $2015 = p + qrs$ ja $p \geq 3$ on alkuluku ja siten pariton, niin $qrs = 2015 - p$ on parillinen. Tämä ei ole mahdollista, kun q, r, s ovat lukua p suurempia alkulukuja.

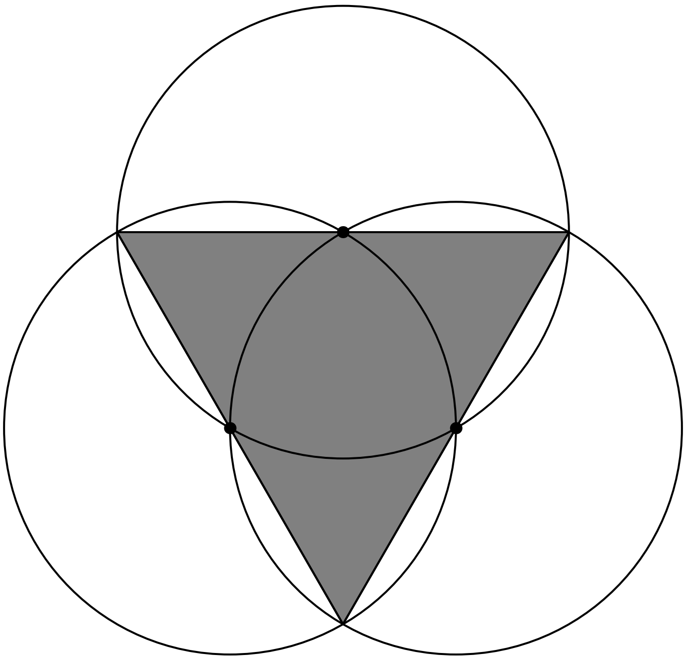
Ratkaisuja on siis tasan yksi, joten b ja d ovat oikein ja a ja c väärin.

V3. Avainidea on tekijöihinjako

$$ab + ac + bc + 1 - abc - a - b - c = (1-a)(1-b)(1-c).$$

Jokainen tulontekijä on väliltä $[0, 1]$, joten tulo on enintään yksi. Tulo on yksi silloin, kun $a = b = c = 0$. Täten b on oikein ja muut väärin.

V4.



Ulkoreuna koostuu kolmesta puoliympyrästä, joten

$$p = 3\pi r.$$

Kuvio koostuu kolmesta puoliympyrästä ja tasasivuisesta kolmiosta, joten

$$A = 3 \cdot \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 = \left(\frac{3\pi}{2} + \sqrt{3}\right) r^2.$$

V5. Jos a on positiivinen kokonaisluku, niin

$$f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a)f(a) = f(a)^2 = 1.$$

Erityisesti $f(1), f(4)$ ja $f(9)$ ovat kaikki 1.

Nyt jos $f(2) = 1$, niin $a = 1$ kelpaa. Jos $f(5) = 1$, niin $a = 4$ kelpaa. Oletetaan siis, että $f(2) = f(5) = -1$.

Nyt $f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) \cdot f(5) = (-1) \cdot (-1) = 1$, joten $a = 9$ kelpaa.

V6.

a) Kuperuuden määritelmän nojalla

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Korvaamalla kuperuuden määritelmässä luvun t luvulla $1 - t$ (joka on välin $[0, 1]$ luku silloin kun t on) saadaan

$$f((1-t)a + (1-(1-t))b) = f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Summaamalla nämä kaksi epäyhtälö saadaan haluttu väite

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq f(a) + f(b).$$

b) Osoitetaan, että $f(x) = x^2$ on kupera funktio, joka ei kuitenkaan toteuta haluttu epäyhtälöä.

Tarkistetaan kuperuus. Olkoot a ja b reaalilukuja ja t välin $[0, 1]$ luku. Epäyhtälö

$$(ta + (1-t)b)^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2$$

sievenee auki kertomisen jälkeen muotoon

$$t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2.$$

Käytetään arviota $2ab \leq a^2 + b^2$ ja muistetaan, että $0 \leq t \leq 1$ eli $t(1-t) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2b^2 \leq \\
&t^2a^2 + t(1-t)(a^2+b^2) + (1-t)^2b^2 \leq \\
&ta^2 + (1-t)b^2,
\end{aligned}$$

mikä on kuperuuden määritelmän epäyhtälö.

Sen sijaan haluttu epäyhtälö ei päde esimerkiksi tapauksessa $a = 0, b = 1$, jolloin $f(2a - b) = f(-1) = 1$ ja $2f(a) - f(b) = 0 - 1 = -1$.

Huomautus: Kuperuuden määritelmää voi tulkita geometrisesti niin, että vaaditaan funktion f kuvaajan pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ välinen jana on aina kuvaajan yläpuolella (tai sen päällä). Pisteiden välisen janan pisteiden x-koordinaatit ovat muotoa $at + b(1-t)$ ja y-koordinaatit muotoa $tf(a) + (1-t)f(b)$ (alla olevan kuvan piste C) ja vastaavien kuvaajien pisteiden y-koordinaatit ovat $f(at + (1-t)b)$ (alla olevan kuvan piste D). Geometrinen tulkinta helpottaa kuperien funktioiden keksimistä ja siten b-kohdan ratkaisuun päätymistä.