Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2016

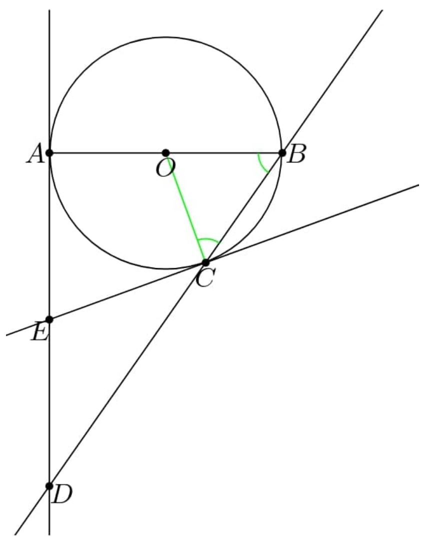
A1. Ideana on katsoa lukuja alkutekijähajotelmien kautta. Luvun 10! alkutekijähajotelmaksi saadaan laskettua

$$\begin{aligned}10! &= \\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 &= \\ 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7.\end{aligned}$$

Erityisesti huomataan, että $10! = 7m^2$, missä $m = 2^4\cdot 3^2\cdot 5 = 720$. Siis 7 kelpaa tehtävänannon mukaiseksi luvuksi. Pienempää tällaista positiivisita kokonaislukua ei ole, koska 7 on alkuluku, joka jakaa luvun 10! mutta jonka neliö ei jaa lukua 10!.

Täten vastaus on $k = 7$ ja $m = 720$.

A2. Ympyrän keskipiste olkoon O. Olkoon E pisteen C kautta piirretyn tangentin leikkauspiste janan AD kanssa.



Merkitään $\alpha = \angle OCB = \angle OBC$. Koska $\angle ECO$ on suora kulma, pätee

$$\angle ECD = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha.$$

Toisaalta suorakulmaisesta kolmiosta ADB saadaan

$$\angle EDC = \angle ADB = 90^\circ - \alpha.$$

Täten kolmio CDE on tasakylkinen. Toisaalta EA ja EC ovat ympyrän tangentteja ja siten yhtä pitkiä. Tästä seuraa, että kaikki janoista EA, EC ja ED ovat yhtä pitkiä, eli erityisesti E on janan AD keskipiste.

A3. Tehtävän ratkaisemiseksi riittää tutkia tapausta $y = z$. Tällöin epäyhtälö sanoo

$$f(xy) - f(x)f(y^2) \geq \frac{1}{4}.$$

Sijoituksella $x = y = 0$ tästä saadaan $f(0) - f(0)^2 \geq \frac{1}{4}$ eli $(1/2 - f(0))^2 \leq 0$. Täten $f(0) = 1/2$.

Vastaavasti sijoituksella $x = y = 1$ saadaan $f(1) - f(1)^2 \geq \frac{1}{4}$ ja täten $f(1) = 1/2$.

Sijoitetaan sitten $y = 0$, mistä saadaan $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}f(x) \geq \frac{1}{4}$, mistä ratkaisemalla $f(x)$ saadaan

$$f(x) \leq \frac{1}{2}$$

kaikilla x.

Sijoittamalla $y = 1$ saadaan $f(x) - \frac{1}{2}f(x) \geq \frac{1}{4}$ eli

$$f(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Yhdistämällä nämä saadaan, että $f(x) = 1/2$ kaikilla x. Tämä todella on ratkaisu tehtävään, koska

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

A4. Taulukoidaan ensiksi voitto- ja häviötiloja pienissä tapauksissa. "V" tarkoittaa, että Aino voittaa ja "H" tarkoittaa, että Väinö voittaa. Sarake kertoo luvun m arvon ja rivi luvun n arvon.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
2	V	V	H	V	V	V	V	V	V	V
3	V	H	V	H	V	V	V	V	V	V
4	V	V	H	V	H	H	V	V	V	V
5	V	V	V	H	V	H	H	H	V	V

Ratkaisu perustuu seuraavaan kahteen huomioon (jotka voi keksiä taulukoinnin kautta):

- Jos tila (m, n), missä $m \geq n$, on voittotila, niin myös tila $(m + n, n)$ on. Jos nimittäin tila (m, n) on voittotila, niin on olemassa jokin kokonaisluku $k \geq 1$, jolla tila $(m - kn, n)$ on häviötila. Tähän tilaan pääsee myös tilasta $(m + n, n)$, joten $(m + n, n)$ on voittotila.

- Jos tila (m, n), missä $m \geq n$, on häviötila, niin tila $(m + n, n)$ on voittotila. Tilasta $(m + n, n)$ voidaan nimittäin siirtyä tilaan (m, n).

Näistä huomioista seuraa, että riippumatta siitä, ovatko tilat $(n,n),(n+1,n),(n+2,n),\ldots,(2n-1,n)$ voitto- vai häviötiloja, kaikki tiloista $(2n,n),(2n+1,n),(2n+2,n),\ldots$ ovat voittotiloja. Täten tehtävänannon väite pätee arvolla $\alpha = 2$.

Huomautus: Tehtävänannon väite pätee myös arvolla $\alpha = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$, mutta tämän todistaminen on vaikeampaa. Voidaan myös todistaa, että millään lukua $(1+\sqrt{5})/2$ pienemmällä α:n arvolla väite ei enää päde.