Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2016

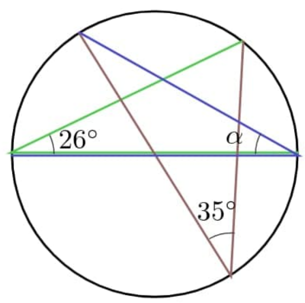
	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$+$	$-$
2.	$-$	$+$	$-$	$-$
3.	$-$	$+$	$+$	$+$
4.	$-$	$+$	$+$	$-$
5.	$-$	$+$	$+$	$-$
6.	$+$	$-$	$-$	$+$

P1. Kauppias ostakoon p kg paahtamatonta kahvia, jonka ostohinta olkoon b euroa per kilogramma. Ostaessa kahvi maksaa siis pb euroa. Koska kahvi paahdettaessa menettää painostaan 20%, niin myytävän kahvin paino on $0{,}8p$ kg, ja kauppias saa siitä $0{,}8pa$ euroa. Jotta voittoa olisi 20%, pitää olla voimassa yhtälö

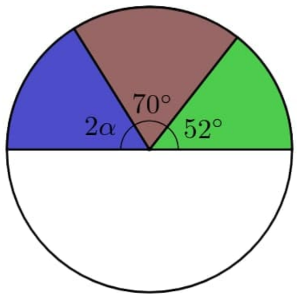
$$0{,}8pa = 1{,}2pb \quad \text{eli} \quad b = \frac{0{,}8}{1{,}2}a = 2a/3.$$

Ostohinta oli siis $(1 - 2/3) \cdot 100\% = 100/3\% \approx 33\%$ pienempi kuin myyntihinta, joten vaihtoehto c on oikein ja muut väärin.

P2. Kuvio muodostuu ympyrän sisään piirretyistä kehäkulmista, joista α ja kaksi tunnettua on tässä merkitty väreillä kuvioon.



Kun näitä kehäkulmia vastaavista keskuskulmista piirretään kuvio, huomataan, että ympyrän ylempi puolisko koostuu vastaavista sektoreista.



Siis

$$2\alpha + 70^\circ + 52^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\alpha = 180^\circ - 70^\circ - 52^\circ = 58^\circ \Leftrightarrow \alpha = 29^\circ.$$

Siis vaihtoehto b on oikein ja muut väärin.

P3. Epäyhtälöiden $A > B$ ja $A \geq B$ tutkimiseksi tutkitaan erotusta $A - B$:

$$\begin{aligned} A - B &= \\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 &= \\ a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - (a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2) &= \\ a^2d^2 + b^2c^2 - 2adbc &= \\ (ad-bc)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Täten $A \geq B$ kaikilla lukujen a, b, c ja d arvoilla eli vaihtoehto b on oikein. Kun $a = 12, b = 5, c = 8, d = 3$, niin $(ad-bc)^2 = (12 \cdot 3 - 5 \cdot 8)^2 = (36 - 40)^2 = 16 > 0$, joten $A > B$ ja vaihtoehto c on väärin. On kuitenkin mahdollista, että $(ad-bc)^2 = 0$, nimittäin esimerkiksi silloin, kun $a = b = c = d = 1 \neq 0$, joten vaihtoehto d on oikein ja a väärin.

P4. Merkitään $p = 40$ cm ja α:lla sektorin keskuskulmaa ja r:llä ympyrän sädettä. Tunnetusti sektorin ala on

$$A = \alpha r^2/2,$$

mutta toisaalta sektorin piirille pätee

$$p = \alpha r + 2r \Leftrightarrow \alpha r = p - 2r,$$

joten toinen tuntemattomista α ja r voidaan eliminoida pinta-alan lausekkeesta:

$$A = \frac{\alpha r \cdot r}{2} = \frac{(p-2r)r}{2} = pr/2 - r^2.$$

Pinta-ala A on siis säteen r toiseen asteen funktio, ja koska toisen asteen kerroin -1 on negatiivinen, sillä on suurin arvo, joka saavutetaan nollakohtien $r = 0$ ja $r = p/2$ puolivälissä eli arvolla $r = p/4$. Tällöin $r = p/4 = 10$ cm (vaihtoehto c on oikein), $\alpha r = p - 2r = 4r - 2r = 2r$ (vaihtoehto b on oikein ja a väärin) ja $\alpha r = 2r \implies \alpha = 2$. Viimeisessä yhtälössä kulmamitta on (tietenkin) radiaaneissa ja suora kulma on $\pi/2 \neq 2$, joten vaihtoehto d on myös väärin.

P5. Tehtävän lauseke supistuu muotoon

$$P = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2015}\right)\left(1 + \frac{1}{2016}\right)$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{2017}{2016} = \frac{2017}{2} = 1008{,}5.$$

Vastaus ei siis ole kokonaisluku, joten a ja d ovat väärin, mutta $1000 < P < 2016$, joten b ja c ovat oikein.

P6. Kertoimien summa on

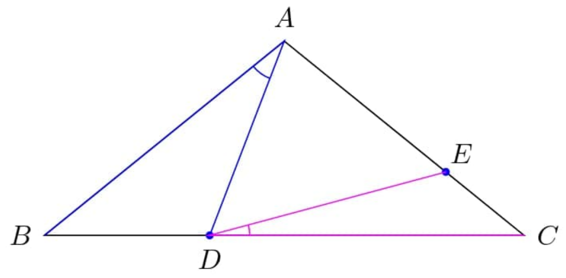
$$\begin{aligned} a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= \\ a_5 \cdot 1^5 + a_4 \cdot 1^4 + a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 &= \\ P(1) = (2 \cdot 1 + 1)^5 = 3^5 = 243 \end{aligned}$$

on selvästi kolmella mutta ei viidellä jaollinen (vaihtoehto a oikein, mutta c väärin). Binomikaavasta saadaan

$$P(x) = (2x+1)^5 = (2x)^5 + \binom{5}{4}(2x)^4 + \binom{5}{3}(2x)^3 + \binom{5}{2}(2x)^2 + \binom{5}{1}2x + 1,$$

eli esimerkiksi ensimmäisen asteen termin kerroin $\binom{5}{1} \cdot 2 = 10$ on viidellä jaollinen (vaihtoehdo d oikein). Koska binomikertoimet $\binom{5}{k}$ ja kakkosen potenssit 2^k eivät ole kolmella jaollisia, niin mikään kertoimista ei ole kolmella jaollinen (b väärin).

P7. Piirretään kuvio tilanteesta. Kuvassa $\angle BAD = 30°$ on tunnettu ja määritettävä kulma on $\angle EDC$.



Merkitään kantakulmia $\alpha = \angle ABC = \angle ACB$, jolloin $\angle DAC = 180° - 2\alpha - 30° = 150° - 2\alpha$. Kolmio ADE on tehtävänannon mukaan myös tasakylkinen, ja $\angle DAC = \angle DAE$ on sen huippukulma. Tämän tasakylkisen kolmion kantakulmalle saadaan

$$\angle DEA = \frac{1}{2}(180° - \angle DAE) = \frac{1}{2}(180° - (150° - 2\alpha)) = \frac{1}{2}(30° + 2\alpha) = 15° + \alpha.$$

Siis $\angle DEC = 180° - (15° + \alpha) = 165° - \alpha$. Lopuksi saadaan

$$\angle EDC = 180° - \angle DCE - \angle DEC = 180° - \alpha - (165° - \alpha) = 15°.$$

P8. Kokeilemalla huomataan ratkaisu $x = 1$. Lisäksi neliöjuurien sisällä sekä yhtälön oikealla puolella on binomin neliötä $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ muistuttavia lausekkeita. Tämä vihjaa siihen, että yhtälö kannattaa kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} &\sqrt{2+4x-2x^2} + \sqrt{6+6x-3x^2} = x^2 - 2x + 6 \\ \Leftrightarrow\ &\sqrt{4-2(x-1)^2} + \sqrt{9-3(x-1)^2} = (x-1)^2 + 5. \end{aligned}$$

Merkitään kätevyyden vuoksi $t = (x-1)^2$, jolloin yhtälö on

$$\sqrt{4-2t} + \sqrt{9-3t} = t + 5.$$

Selvästi $t \geq 0$, joten yhtälön oikea puoli on vähintään viisi. Toisaalta yhtälön vasen puoli on enintään $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$. Yhtäsuuruus vaatii $t = 0$, joten $x = 1$ on yhtälön ainoa ratkaisu.