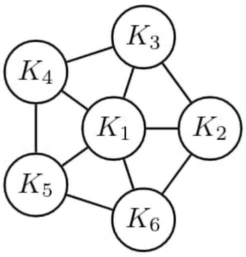
Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2017

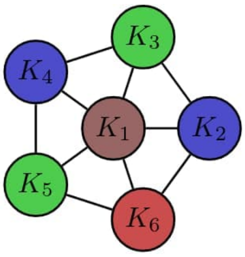
A1. Käyttämällä moduloiden laskusääntöjä ja sitä tietoa, että $6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}$ saadaan
$$2017^{2017} - 2016^{2016} \equiv 7^{2017} - 6^{2016} \equiv 7^{2017} - 6 \pmod{10}.$$
Luvun 7 potenssien jäännökset kymmenellä jaettaessa ovat $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, \ldots$ Koska $2017 \equiv 1 \pmod{4}$, on jakojäännös 7, joten
$$2017^{2017} - 2016^{2016} \equiv 7 - 6 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Vastaus: Viimeinen numero on yksi.

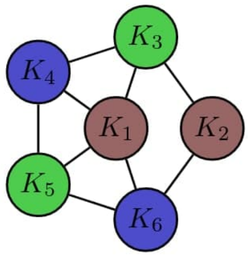
A2. a) Piirretään tilanteesta verkko niin, että kurssit ovat solmuja ja kahden solmun välille piirretään särmä täsmälleen silloin, kun joku haluaa osallistua molempiin kokeista.



Jos kurssien välillä on särmä, niin niiden kokeet pitää järjestää eri koetilaisuudessa; verkkoteoreettisesti sanotaan, että ne pitää *värittää* eri väreillä. Solmuille K_1 tulee selvästi oma värinsä, ja koska muut solmut muodostavat parittoman pituisen syklin, niiden värittämiseen tarvitaan kolme väriä. Yksi mahdollinen väritys neljällä värillä on seuraava.

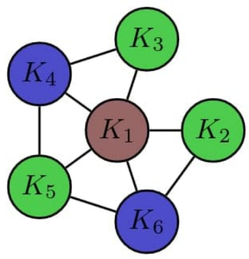


b) Peruuttava oppilas on joko joku oppilaista $A - E$ tai joku oppilaista $F - J$. Symmetriasyistä riittää tarkastella niitä tapauksia, joissa A tai F peruuttaa. Jos A peruuttaa, kolme koetilaisuutta riittää.



Vähemmälläkään ei selvitä, koska jo viiden solmun syklin värittämiseen tarvitaan kolme väriä.

Jos F peruuttaa, niin jälleen selvitään kolmella värillä.



Tässä tapauksessa solmu K_1 vaatii oman värinsä, ja muiden värittäminen yhdellä värillä ei tietenkään onnistu.

Vastaus: a) Tarvitaan neljä koetilaisuutta. b) Kolme koetilaisuutta riittää (ja tarvitaan) peruutuksen jälkeen.

A3. Kolme lukua muodostaa aritmeettisen jonon jos ja vain jos yksi niistä on kahden muun keskiarvo. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että jono on valmiiksi oikeassa järjestyksessä ja siis

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}.$$

Kertomalla tämän puolittain nimittäjien tulolla saadaan

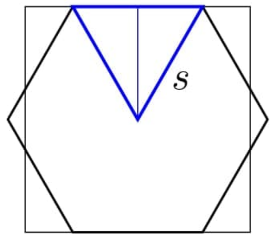
$$2(a+b)(b+c) = (a+c)(b+c) + (a+c)(a+b)$$

eli auki kerrottuna

$$2ab + 2ac + 2b^2 + 2bc = ab + ac + bc + c^2 + a^2 + ac + bc + ab.$$

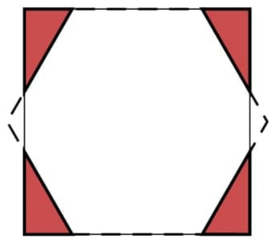
Sievennyksen jälkeen jää vain $2b^2 = a^2 + c^2$. Siis b^2 on lukujen a^2 ja c^2 keskiarvo.

A4. Olkoon säännöllisen kuusikulmion sivun pituus s. Säännöllinen kuusikulmio jakautuu kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi, joiden korkeudet ovat puolet neliön sivusta eli $\frac{1}{2}$.



Siis $\frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{1}{2}$, mistä $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Säännöllisten monikulmioiden leikkauksen ala saadaan poistamalla neliöstä neliön kärkiin jäävät suorakulmaiset kolmiot.



Tällaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus saadaan luonnollisesti siitä, että kaksi tällaista kateettia ja kuusikulmion sivu yhdessä muodostavat neliöön sivun. Siis lyhyen kateetin pituus on $(1-s)/2$. Lisäksi poistettavan suorakulmaisen kolmion kulmat voidaan päätellä siitä, että säännöllisen kuusikulmion kulmien yhteinen suuruus on $(6-2)\cdot 180°/6 = 120°$. Siis lyhyemmän kateetin ja hypotenuusan välinen kulma on $180° - 120° = 60°$. Siten pidemmän kateetin pituus on $\sqrt{3}(1-s)/2$ ja poistettava ala

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}(1-s)}{2} \cdot \frac{1-s}{2} &= \frac{\sqrt{3}(1-1/\sqrt{3})^2}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)^2}{2\cdot 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})}{2\cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1. \end{aligned}$$

Leikkauksen alaksi saadaan siis

$$1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Yhteisen osan ala on siis $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.