Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2017

	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$-$	$+$
2.	$+$	$-$	$-$	$+$
3.	$-$	$+$	$-$	$+$
4.	$+$	$+$	$-$	$+$
5.	$-$	$+$	$-$	$-$
6.	$-$	$-$	$+$	$-$

P1. Lehtipuiden lukumäärä olkoon aluksi n, jolloin havupuiden määrä on $1{,}4n$. Hakkuiden jälkeen lehtipuiden määrä putoaa lukuun $n-0{,}12n = 0{,}88n$ ja havupuiden lukuun $(1-0{,}2)\cdot 1{,}4n = 0{,}8\cdot 1{,}4n = 1{,}12n$, joten havupuiden osuus on hakkuiden jälkeen

$$\frac{1{,}12n}{0{,}88n+1{,}12n} = \frac{1{,}12}{2} = 0{,}56 = 56\% = \frac{14}{25}.$$

Siis kohdat b ja d ovat oikein, a ja c sen sijaan väärin.

P2. Olkoon oppilaiden lukumäärä $100n$. Tänään sairaita on $20n$ ja terveitä $80n$. Terveistä on huomenna sairaita 5% eli

$$\frac{5}{100}\cdot 80n = 4n.$$

Sairaista on huomennakin sairaita

$$\frac{55}{100}\cdot 20n = 11n.$$

Huomenna sairaita on siis $4n + 11n = 15n$ eli 15% kaikista. Vaihtoehdot a ja d ovat siis oikein, b ja c sen sijaan väärin.

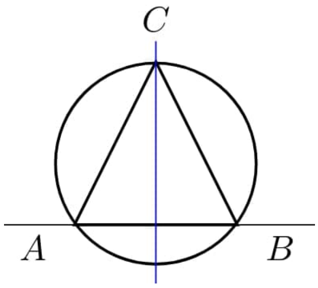
P3. Ratkaistaan ensin yhtälöt. Yhtälöllä $x^2+x-2=0$ on ratkaisut $x=1$ ja $x=-2$ (ratkaisukaavalla tai huomaamalla tekijöihinjako $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$). Vastaavasti yhtälöllä $y^2-3y+2=0$ on ratkaisut $y=1$ ja $y=2$.

On siis mahdollista, että $x=y=1$ (kohta a väärin), ja selvästi xy on kokonaisluku (b oikein). $x+y$ ei välttämättä ole positiivinen, sillä $-2+1=-1<0$ (c väärin). Eri mahdollisuudet summalle $x+y$ ovat $2, 3, -1$ ja 0, joten kohta d on oikein.

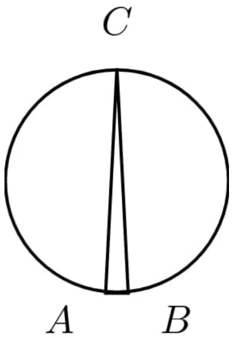
P4. Koska kolmion kanta AB on annettu, kolmion pinta-alan maksimoimiseksi tulee valita C niin, että kolmion korkeusjana on mahdollisimman pitkä. Tämä tarkoittaa sitä, että C valitaan mahdollisimman kaukaa suorasta AB, jolloin kolmio ACB on tasakylkinen.

Kohta a seuraa kehäkulmalauseesta: Koska ABC on tasakylkinen, ainoastaan sen huippukulma $\angle ACB$ voi olla suora. Kehäkulmalauseen mukaan $\angle ACB = 90°$ jos ja vain jos jännettä AB vastaava keskuskulma on oikokulma. Tällöin AB on tietenkin ympyrän halkaisija.

Tasakylkisen kolmion ABC korkeusjana on osa jänteen AB keskinormaalista, joten kohta b on myös oikein.



Kohta c ei pidä paikkaansa, sillä kolmion ABC korkeus on aina korkeintaan ympyrän halkaisija, kun taas kanta AB voi olla mielivaltaisen lyhyt.



Kohta d pitää paikkansa sen tähden, että kolmion ABC korkeus on aina vähintään ympyrän säteen pituus, jolloin kylkien pituuksien summa on jo vähintään ympyrän halkaisija.

P5. Tehtävän oletuksesta saadaan, että $-1/2 < x < 1/2$, joten $-3/2 < x-1 < -1/2$. Täten

$$|x-1| > \frac{1}{2},$$

joten

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{|x|}{|x-1|} < \frac{1/2}{1/2} = 1,$$

missä epäyhtälö seuraa siitä, että osoittaja on alle $1/2$ ja nimittäjä on yli $1/2$.

Siis kohta b on oikein. Kohdat a ja c eivät päde, sillä $x = 0$ toteuttaa oletuksen, mutta $|0/(0-1)| = 0$ ei ole välillä $[1/2, 1]$ eikä välillä $[1/2, 3/2]$. Kohta d on tietenkin väärin, koska kohta b on oikein.

P6. Merkitään $y = 3^x$. Tällöin $3^{-x} = 1/y$, joten yhtälö on

$$3y + \frac{1}{y} = 4.$$

Kertomalla y:llä tästä saadaan toisen asteen yhtälö

$$3y^2 + 1 = 4y,$$

josta saadaan ratkaistua (ratkaisukaavalla tai muuten), että ratkaisut ovat $y = 1$ ja $y = 1/3$. Nämä vastaavat arvoja $x = 0$ ja $x = -1$.

Siis ratkaisuja on täsmälleen kaksi, joten kohta c on ainoa oikea.

P7. Yhden sinisen renkaan ala on $\pi\left((2k+1)^2 - (2k)^2\right) = \pi(4k+1)$, missä k on parillinen kokonaisluku ja $k < 100$. Kokonaisala on siis

$$\begin{aligned}\pi(1^2 - 0^2 + 3^2 - 2^2 + 5^2 - 4^2 + \ldots + 99^2 - 98^2) &= \\ \pi\left(1 + 5 + 9 + \ldots + (4 \cdot 49 + 1)\right) &= \\ 50\pi + 4\pi \cdot \frac{49 \cdot 50}{2} = 50\pi + 2\pi \cdot 49 \cdot 50 &= 4950\pi.\end{aligned}$$

P8. Merkitään kysymys-vastaus-sarjoja seuraavasti: Jos kysymykseen "Onko se s" saadaan myönteinen vastaus, merkitään yksinkertaisesti s, jos kielteinen, niin sen sijaan $\bar{s}$. Esimerkiksi $a\bar{c}b$ tarkoittaa siis, että kysymykseen "Onko se a" on saatu myönteinen vastaus, kysymykseen "Onko se c" sen sijaan kielteinen, ja kysymykseen "Onko se b" jälleen myönteinen vastaus. Jos w on tällainen kysymys-vastaus-sarja ja siitä voidaan päätellä, että Veeran valitsema alkio oli s, merkitään $w \to s$.

Väite: Oletetaan, että Kari kysyy kolmella ensimmäisellä kysymyksellään ensin, onko valittu alkio a, sitten onko se b ja lopuksi uudelleen, onko se a. Jos Veera vastaa ainakin kahdesti myönteisesti, niin Kari voi päätellä valitun alkion.

Todistus: Huomataan ensin, että

$$aba \to a, a\bar{b}a \to a.$$

Koska nimittäin kolmesta peräkkäisestä Veeran vastauksesta korkeintaan yksi on vale, niin Veeran on täytynyt puhuta totta vastatessaan kahdesti myönteisesti kysymykseen "Onko se a?". Jäljelle jäävissä tapauksissa saadaan

$$ab\bar{a} \to b, \bar{a}ba \to b.$$

Veera on nimittäin valehdellut jo kerran vastatessaan kysymyksiin a:sta, joten myönteinen vastaus b:stä on rehellinen.

Väite: Oletetaan, että kysymys-vastaus-sarjan alku on $a\bar{b}\bar{a}$ tai $\bar{a}\bar{b}a$. Tällöin Kari pystyy selvittämään Veeran valitseman alkion korkeintaan kahdella jatkokysymyksellä.

Todistus: Kari tietää Veeran valehdelleen ainakin kerran kysymyksiin a:sta, joten epäävä vastaus b:stä on rehellinen. Siis valittu alkio on a tai c, joten Kari jatkaa kysymällä "Onko se c?" ja toistaa kysymyksen, jos se on tarpeen. Jos Veera vastaan näihin kysymyksiin kahdesti samalla tavalla, niin Kari tietää vastauksen perusteella valitun alkion. Muuten Kari tietää Veeran valehdelleen ainakin kerran, joten kolmas vastaus on rehellinen ja Kari päättelee alkion sen perusteella. Tarkemmin saadaan

$$a\bar{b}\bar{a}c, a\bar{b}\bar{a}\bar{c}c, \bar{a}\bar{b}a\bar{c}c, \bar{a}\bar{b}acc \to c,$$

$$a\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{c}, \bar{a}\bar{b}ac\bar{c} \to a.$$

Väite: Oletetaan, että kysymys-vastaus-sarjan alku on $\bar{a}b\bar{a}$ tai $\bar{a}\bar{b}\bar{a}$. Tällöin Kari pystyy selvittämään valitun alkion kaikkiaan kuudella kysymyksellä.

Todistus: Kolmen ensimmäisen vastauksen perusteella Kari tietää, että valittu alkio on b tai c. Hän kysyy ensin uudestaan, onko alkio b, ja varautuu kysymään sen jälkeen kahdesti, onko alkio c. Jos Veeran vastaus toiseen kysymykseen oli myönteinen, niin voidaan päätellä

$$\bar{a}b\bar{a}b \to b, \bar{a}b\bar{a}\bar{b}c \to c,$$

$$\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{c}c \to c, \bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{c} \to b.$$

Jos toinen vastaus sen sijaan oli kielteinen, niin

$$\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}bcc \to c$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{a}bc\bar{c}, \bar{a}\bar{b}\bar{a}b\bar{c} \to b.$$

Näistä aputuloksista seuraa ratkaisu.

Vastaus: Kari pystyy kuudella kysymyksellä selvittämään Veeran valitseman alkion.