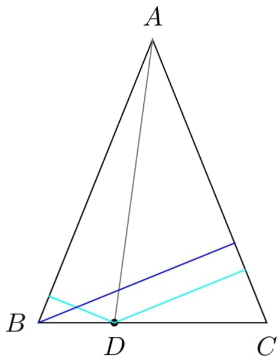
Lukion matematiikkakilpailun avoimen sarjan ratkaisuja 2018

A1. Koska $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, niin yhtälön $x^2 - y^2 = 2018$ ratkaisut saataisiin sopivasta kokonaisluvun 2018 tekijöihinjaosta. Oletetaan, että nämä kokonaisluvut olisivat a ja b eli $2018 = ab$, ja jollekin ratkaisulle pätisi $x + y = a$ ja $x - y = b$. Tällöin $2x = (x+y) + (x-y) = a + b$, joten tekijöihinjaossa tekijöiden summan pitäisi olla parillinen. Kuitenkin luku 2018 on parillinen muttei neljällä jaollinen, joten missä tahansa tekijöihinjaossa toinen tekijä on parillinen ja toinen pariton. Siis Diofantoksen yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Huomautus: Tehtävän voi myös ratkaista laskemalla, että $2018 = 2 \cdot 1009$, missä 1009 on alkuluku, ja käymällä eri a:n ja b:n arvoilla saatavat yhtälöparit x:lle ja y:lle läpi. Vielä kolmas eri tapa on huomata, ettei yhtälöllä ole ratkaisuja modulo 4.

A2. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmo, d pisteen B etäisyys sivusta AC, D sivun BC piste, d_0 pisteen D etäisyys sivusat AC ja d_1 sivusta AB. Esimerkkikuva on tasakylkinen, etäisyys d on merkitty sinisellä sekä etäisyydet d_0 ja d_1 syaanilla.



Huomataan, että jana AD jakaa kolmion ABC kolmioihin ABD ja ADC. Lasketaan kolmion ABC pinta-ala kahdella tavalla, toisaalta vetoamalla siihen, että d on sivun AC vastainen korkeus, toisaalta laskemalla pinta-ala pikkukolmioiden pinta-alojen summana. Saadaan

$$\frac{d}{2}AC = \frac{d_0}{2}AB + \frac{d_1}{2}AC.$$

Jos $AB = AC$, niin tämä yhtälö supistuu muotoon $d = d_0 + d_1$.

Jos taas $AB < AC$ ja $D \neq B$, niin

$$\frac{d}{2}AC = \frac{d_0}{2}AB + \frac{d_1}{2}AC < \left(\frac{d_0}{2} + \frac{d_1}{2}\right)AC,$$

mistä seuraa $d < d_0 + d_1$. Vastaavasti jos $AB > AC$ (ja $D \neq B$) saadaan $d > d_0 + d_1$.

A3. Vastaus: Ritarit saavat joka lähtötilanteesta kaikki lamput sammutettua, paitsi jos $3 \mid n$.

Tarkastellaan katkaisimien painallusjonoja. Ensimmäinen huomio on, että jokaisen lampun kannalta vain sillä, onko sen läheisyydessä olevia kolmea katkaisinta painettu parittoman vai parillisen monta kertaa, on merkitystä. Tämä myös merkitsee, että minkään ritarin ei kannata painaa katkaisintaan kuin korkeintaan kerran. Painallusten järjestyksellä ei myöskään ole väliä, joten tarkasteltavana on 2^n erilaista painallusyhdistelmää. Huomattakoon, että lamppujen erilaisia aloitustiloja on myös 2^n. Tarkastellaan kahta tapausta sen mukaan, onko n jaollinen kolmella. Indeksöidään ritarit luvuin $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

a) Oletetaan, että $3 \mid n$. Jos kaikki lamput ovat aluksi poissa päältä, niin ritarien tehtävällä on triviaali ratkaisu, nimittäin olla painamatta mitään katkaisinta. On kuitenkin myös epätriviaali ratkaisu, nimittäin ensin kaikki ritarit, jotka on indeksöity kolmella jaollisella luvulla, painavat katkaisinta, jolloin kaikki lamput syttyvät. Sen jälkeen kaikki indeksejä $k \equiv 1 \pmod 3$ olevat ritarit tekevät saman, ja lamput sammuvat. Koska yhteen alkuasetelmista on ainakin kaksi ratkaisua ja alkutiloja on yhtä monta kuin tarkasteltavia oleellisesti erilaisia painallusjonoja, niin kaikkia alkutiloja ei pystytä ratkaisemaan.

b) Oletetaan, että $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Riittää osoittaa, että jos kaikki lamput ovat aluksi sammuksissa, niin ritarit pystyvät sytyttämään minkä tahansa yksittäisen lampun. Voidaan olettaa, että tämä on lamppu numero 2. Kun ritarit 1 ja 2 painavat katkaisintaan, niin lamput 0 ja 3 jäävät päälle ja muut ovat sammuksissa. Vastaavasti jokaisella kokonaisluvulla k on mahdollista vaihtaa lamppujen $3k$ ja $3k+3$ tila (muiden pysyessä ennallaan), joten induktiolla päästään tilaan, jossa lamput 0 ja $3k$ ovat päällä ja muut sammuksissa. Koska $\mathrm{syt}(n, 3) = 1$, kokonaisluku k voidaan valita niin, että $3k \equiv 1 \pmod n$. Tällä luvun k valinnalla päästään tilaan, jossa lamput 0 ja 1 ovat päällä ja muut sammuksissa. Kun ritari 1 nyt painaa katkaisintaan, niin vain lamppu 2 on päällä.

A4. Huomataan, että $y + f(2y) = 100$ eli $f(2y) = 100 - y$ kaikilla niillä luvuilla y, jotka ovat muotoa $f(x)$ jollakin x. Yritetään siis osoittaa, että 50 esiintyy funktion f arvona, jotta saadaan laskettua $f(100)$.

Tiedetään, että $f(150) = 25$, joten yhtälö $f(2y) = 100 - y$ pätee arvolla $y = 25$. Siis $f(50) = 100 - 25 = 75$. Koska f on jatkuva funktio ja se saa arvot 25 ja 75, saa se kaikki muutkin arvot väliltä $[25, 75]$.

Erityisesti f saa arvon $y = 50$, joten nyt $f(100) = 100 - 50 = 50$.

Huomataan myös, että funktio $f(x) = 100 - x/2$ toteuttaa yhtälön $f(2y) = 100 - y$ kaikilla reaaliluvuilla y. Siis todella on olemassa vähintään yksi tehtävänannon ehdon toteuttava funktio, eli 50 on mahdollinen luvun $f(100)$ arvo.