# Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2018

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| 2. | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| 3. | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| 4. | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| 5. | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| 6. | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |

**P1.** Merkitään lukion $A$ oppilasmäärää vuoden 2017 alussa $x$:llä ja lukion $B$ oppimäärää $y$:llä. Vuoden 2017 lopussa oppilasmäärät ovat siis $a = 1{,}05x$ ja $b = 1{,}10y$, mistä saadaan vuoden 2017 alun oppilasmäärien suhteeksi

$$\frac{x}{y} = \frac{a/1{,}05}{b/1{,}10} = \frac{1{,}10a}{1{,}05b} = \frac{22a}{21b}.$$

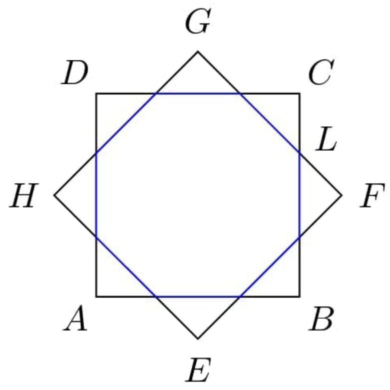
Siis kohta c on oikein, ja muut väärin, koska niissä annetut vastaukset eivät ole yhtä suuria oikean vastauksen kanssa.

**P2.** Koska $k^{2x} = 16$ ja $k > 0$, niin $k^x = 4$ ja

$$k^{3x} - k^x = (k^x)^3 - 4 = 4^3 - 4 = 60.$$

Siis kohta c on oikein. Sen sijaan muut kohdat ovat väärin, sillä $60 \neq 56$, 60 on rationaaliluku ja vastaus on riippumaton lukujen $k$ ja $x$ arvoista, kunhan oletukset pätevät.

**P3.** Koska kaikki kuvatulla tavalla saatavat 16-kulmiot ovat yhdenmuotoisia, voidaan olettaa, että alkuperäisen neliön kärjet ovat pisteissä $A = (-1,-1), B = (1,-1), C = (1,1)$ ja $D = (-1,1)$. Koska neliön $ABCD$ lävistäjän pituus on $2\sqrt{2}$ ja kierretyn neliön lävistäjät ovat koordinaattiakseleilla origon suhteen symmetrisesti, kierretyn neliön $EFGH$ kärjet ovat siis $E = (\sqrt{2},0), F = (0,\sqrt{2}), G = (-\sqrt{2},0)$ ja $H = (0,-\sqrt{2})$. Edelleen huomataan, että syntyvät 16-kulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, vaikka se ei ole säännöllinen, sillä 16-kulmio on symmetrinen 45 asteen kierron suhteen.




Lasketaan neliöiden sivujen $BC$ ja $FG$ leikkauspisteen $L$ koordinaatit. Koska $B = (1, -1)$ ja $C = (1, 1)$, niin $L = (1, y)$. Toisaalta sivulla $FG$ koordinaattien summa on $\sqrt{2}$, joten $y = \sqrt{2} - 1$. Tästä seuraa, että 16-kulmion sivun pituus on

$$|LC| = |1 - y| = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}.$$

Piirien suhde on siis

$$\frac{16 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 \cdot 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Toisaalta

$$\frac{4}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}),$$

joten kohdat b ja c ovat molemmat oikein. Toisaalta $4-2\sqrt{2} < 4-2\cdot 1{,}4 = 4-2{,}8 = 1{,}2$, joten myös kohta a on oikein. Sen sijaan $\frac{2\sqrt{2}+1}{2} > \frac{2+1}{2} = 1{,}5$, joten kohta d on väärin.

**P4.** Kun $x \neq 1$, niin

$$\begin{aligned} \frac{2x + a^2 - 3a}{x - 1} &= a \\ \Leftrightarrow 2x + a^2 - 3a &= a(x - 1) = ax - a \\ \Leftrightarrow (2 - a)x + a^2 - 2a &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - a)(x - a) &= 0. \end{aligned}$$

Jos $a = 2$, niin yhtälö supistuu identtisesti todeksi yhtälöksi, joten vaihtoehto a on oikein. Jos $a \neq 2$, niin $(2 - a)(x - a) = 0 \Leftrightarrow x = a$, mutta koska $x \neq 1$, niin yhtälölle ei jää ratkaisuja, kun $a = 1$. Siis kohta b on oikein. Vaihtoehdot c ja d ovat ristiriidassa kohdan b kanssa, joten ne ovat väärin.

**P5.** Olkoon $m(k)$ pienin mahdollinen määrä alueita ja $M(k)$ suurin mahdollinen määrä alueita, jotka syntyvät, kun $k$ suoraa jakaa tason alueisiin. Selvästi $m(1) = M(1) = 2$. Jokainen lisätty suora lisää alueiden määrää vähintään yhdellä ja enintään $k + 1$:lla, missä $k$ on tasoon aiemmin piirrettyjen suorien määrä. Siis $m(k + 1) = m(k) + 1$ ja $M(k + 1) = M(k) + k + 1$. Jälkimmäisen rekursiokaavan voi päätellä niin, että lisättävällä suoralla on korkeintaan $k$ leikkauspistettä aiemmin piirrettyjen suorien kanssa, joten aiemmat suorat jakavat uuden suoran korkeintaan $k+1$:ksi janaksi ja puolisuoraksi, jotka ovat uusie n alueiden reunoja. Erityisesti saadaan

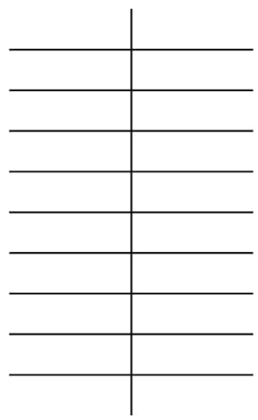
$$m(10) = m(1) + 9 = 2 + 9 = 11$$

ja

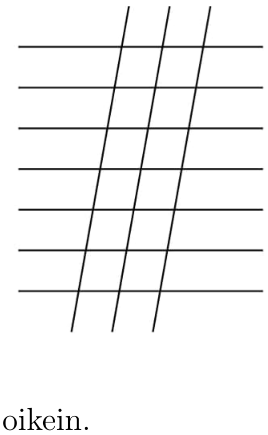
$$M(10) = M(1) + (2 + 3 + 4 + \ldots + 10) = 2 + \frac{10 \cdot 11}{2} - 1 = 56.$$

Vaihtoehto c on siis oikein ja b väärin.

Koska $11 < 20 < 32 < 56$, täytyy erikseen tutkia voidaanko kymmenen suoraa asetella sopivalla tavalla niin, että alueiden määräksi tulee 20 tai 32. Molemmat osoittautuvat mahdollisiksi. 20 aluetta saadaan niin, että 9 yhdensuuntaista suoraa jakaa tason ensin 10 osaan ja yksi erisuuntainen puolittaa alueet.



Vastaavasti $32 = 4 \cdot 8$, mikä määrä alueita saadaan, kun 7 yhdensuuntaista suoraa jakaa ensin tason 8 osaan ja sen jälkeen 3 näiden kanssa erisuuntaista, mutta keskenään samansuuntaista suoraa jakaa kunkin osan neljään alueeseen.



Vaihtoehdot a ja d ovat siis oikein.

**P6.** Lasketaan, kuinka monta neljän loikan sarjaa on. Symmetrian vuoksi voidaan tutkia tapausta, jossa sammakko tekee aluksi hypyn pisteeseen $(1, 2)$ ja lopuksi kertoa vastaus kahdeksalla.

Käymällä kahdeksan eri tapausta siitä, mihin sammakko hyppää toisella loikalla saadaan seuraavat määrät sille, monellako tavalla sammakko voi palata takaisin origoon kahdella hypyllä. Alla $\times$ kuvaa pistettä $(1, 2)$, jossa sammakko on ensimmäisen hypyn jälkeen, ja origossa on luku 8.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | | 1 | |
| 2 | | | | 2 |
| | | $\times$ | | |
| 2 | | | | 2 |
| | 8 | | 2 | |

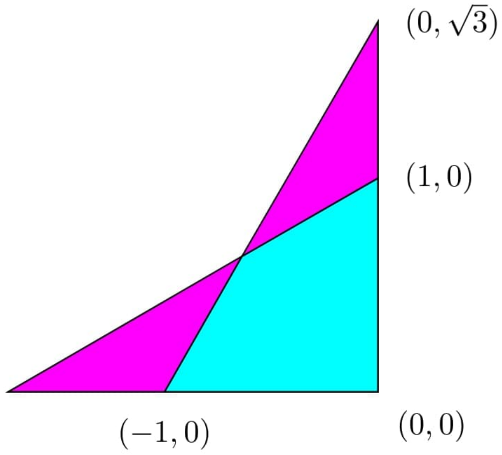
Täten tapoja on $8 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 21$. Kerrottuna kahdeksalla tapoja on $8 \cdot 21 = 162$.

Tästä saadaan, että kohdat a ja b ovat oikein ja kohdat c ja d väärin.

**P7.** Koska $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, niin yhtälön $x^2 - y^2 = 2018$ ratkaisut saataisiin sopivasta kokonaisluvun 2018 tekijöihinjaosta. Oletetaan, että nämä kokonaisluvut olisivat $a$ ja $b$ eli $2018 = ab$, ja jollekin ratkaisulle pätisi $x + y = a$ ja $x - y = b$. Tällöin $2x = (x + y) + (x - y) = a + b$, joten tekijöihinjaossa tekijöiden summan pitäisi olla parillinen. Kuitenkin luku 2018 on parillinen muttei neljällä jaollinen, joten missä tahansa tekijöihinjaossa toinen tekijä on parillinen ja toinen pariton. Siis Diofantoksen yhtälöllä ei ole ratkaisua.

**Huomautus:** Tehtävän voi myös ratkaista laskemalla, että $2018 = 2 \cdot 1009$, missä 1009 on alkuluku, ja käymällä eri $a$:n ja $b$:n arvoilla saatavat yhtälöparit $x$:lle ja $y$:lle läpi. Vielä kolmas eri tapa on huomata, ettei yhtälöllä ole ratkaisuja modulo 4.

**P8.** Tehtävän kuviossa on kaksi ns. koululaisen kolmiota, jotka saadaan puolittamalla tasasivuinen kolmio pitkin keskijanaa. Siis pienemmän kateetin pituus on 1, hypotenuusan 2 ja suuremman kateetin $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Piirretään kolmiot koordinaatistoon ja laitetaan1 yhteinen suora kulma origoon.




Tehtävässä kysytään kuvan syaaninvärisen nelikulmion pinta-alaa; selvitetään ratkaisua varten nelikulmion neljännenkin kärjen koordinaatit.

Hypotenuusien yhtälöt ovat

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1, \end{cases}$$

sillä kulmakertoimet ovat kateettien suhteiden mukaiset ja hypotenuusat päättyvät $y$-akselille tunnettuihin pisteisiin. Hypotenuusien leikkauspisteen $x$-koordinaatiksi saadaan

$$\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \frac{x}{\sqrt{3}} + 1,$$

eli

$$x = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2}.$$

Symmetrian avulla (tai yhtälöihin sijoittamalla) saadaan $y$-koordinaatiksi

$$y = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

Merkitään selvitettävää pinta-alaa $A$:lla. Kummankin koululaisen kolmion pinta-ala on $1 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$, joten koko kuvion pinta-ala on $\sqrt{3} - A$. Toisaalta aiemmin sinipunaisen kolmion $x$-akselilla sijaitsevan kannan pituus on $\sqrt{3} - 1$ ja sitä vastaava korkeus nelikulmion neljännen kärjen $y$-koordinaatti eli $(3 - \sqrt{3})/2$. Siis sinipunaisen kolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{(3 - \sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} - 1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3).$$

Kuvion pinta-ala tämän avulla laskettuna on

$$2\sqrt{3} - 3 + A,$$

mistä saadaan yhtälö

$$\sqrt{3} - A = 2\sqrt{3} - 3 + A \Leftrightarrow 3 - \sqrt{3} = 2A \Leftrightarrow A = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}.$$

Täten yhteinen pinta-ala on $(3 - \sqrt{3})/2$.