Lukion matematiikkakilpailun välisarjan ratkaisuja 2018

	a	b	c	d
1.	$+$	$-$	$-$	$+$
2.	$+$	$+$	$+$	$-$
3.	$+$	$-$	$+$	$-$

V1. Merkitään aritmeettisen jonon peräkkäisten jäsenten erotusta d:llä ja jäsenten lukumäärää $2k$:lla, missä k on positiivinen kokonaisluku. Järjestysluvultaan parittomista jäsenistä ensimmäinen on 1 ja viimeinen $1+(2k-2)d$, parillista järjestyslukua olevilla nämä ovat vastaavasti $1+d$ ja $1+(2k-1)d$. Tiedetään, että

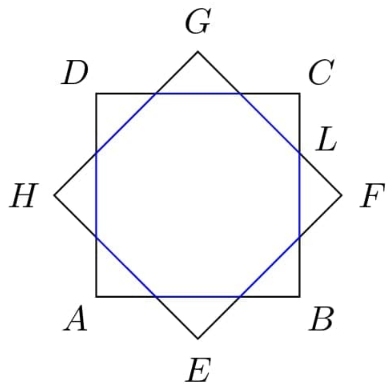
$$k \cdot \frac{1+(1+(2k-2)d)}{2} = 190 \quad \text{ja} \quad k \cdot \frac{(1+d)+(1+(2k-1)d)}{2} = 210.$$

Tästä voidaan ratkaista k ja d, esimerkiksi huomaamalla, että

$$\begin{aligned} 20 = 210 - 190 = \\ k \cdot \frac{(1+d)+(1+(2k-1)d)}{2} - k \cdot \frac{1+(1+(2k-2)d)}{2} = \\ k \cdot \frac{d+d}{2} = kd. \end{aligned}$$

Siis $210 = k \cdot \frac{(1+d)+(1+(2k-1)d)}{2} = k(1+kd) = k \cdot 21$, joten $k = 10$ ja $d = 2$. Jonossa on siis $2k = 20$ (kohta a on oikein), mutta peräkkäisten erotus on vain 2 (kohta b väärin). Lukujonon viimeinen jäsen on $1+(2k-1)d = 1 + 19 \cdot 2 = 39$, joten c on väärin ja d oikein.

V2. Koska kaikki kuvatulla tavalla saatavat 16-kulmiot ovat yhdenmuotoisia, voidaan olettaa, että alkuperäisen neliön kärjet ovat pisteissä $A = (-1,-1), B = (1,-1), C = (1,1)$ ja $D = (-1,1)$. Koska neliön $ABCD$ lävistäjän pituus on $2\sqrt{2}$ ja kierretyn neliön lävistäjät ovat koordinaattiakseleilla origon suhteen symmetrisesti, kierretyn neliön $EFGH$ kärjet ovat siis $E = (\sqrt{2},0), F = (0,\sqrt{2}), G = (-\sqrt{2},0)$ ja $H = (0,-\sqrt{2})$. Edelleen huomataan, että syntyvät 16-kulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, vaikka se ei ole säännöllinen, sillä 16-kulmio on symmetrinen 45 asteen kierron suhteen.



Lasketaan neliöiden sivujen BC ja FG leikkauspisteen L koordinaatit. Koska $B = (1, -1)$ ja $C = (1, 1)$, niin $L = (1, y)$. Toisaalta sivulla FG koordinaattien summa on $\sqrt{2}$, joten $y = \sqrt{2} - 1$. Tästä seuraa, että 16-kulmion sivun pituus on

$$|LC| = |1 - y| = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}.$$

Piirien suhde on siis

$$\frac{16 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 \cdot 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Toisaalta

$$\frac{4}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{2^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{4 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}),$$

joten kohdat b ja c ovat molemmat oikein. Toisaalta $4-2\sqrt{2} < 4-2{\cdot}1{,}4 = 4-2{,}8 = 1{,}2$, joten myös kohta a on oikein. Sen sijaan $\frac{2\sqrt{2}+1}{2} > \frac{2+1}{2} = 1{,}5$, joten kohta d on väärin.

V3. Luku $8xy+2 = 2(4xy+1)$ on aina parillinen ja yhdistetty luku, sillä $4xy+1 > 1$. Siis $x^2 + 4y^2 + 1 < 8xy + 2$, koska luku $x^2 + 4y^2 + 1$ on alkuluku. Luvun $8xy + 2$ suurin tekijä on luonnollisesti $8xy + 2$, ja toiseksi isoin on $(8xy + 2)/2 = 4xy + 1$. Siispä $x^2 + 4y^2 + 1 \leq 4xy + 1$. Tästä seuraa

$$(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 \leq 0.$$

Koska neliö $(x - 2y)^2$ on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla, on oltava $x = 2y$. Siten luku x on parillinen ja a-kohta tosi. Ja c-kohdan osamäärä on

$$\frac{8xy + 2}{x^2 + 4y^2 + 1} = \frac{16y^2 + 2}{8y^2 + 1} = 2,$$

ja koska $2 < 4$, on myös c-kohta varmasti tosi.

Toisaalta, jos valitaan vaikkapa $x = 6$ ja $y = 3$, niin luku

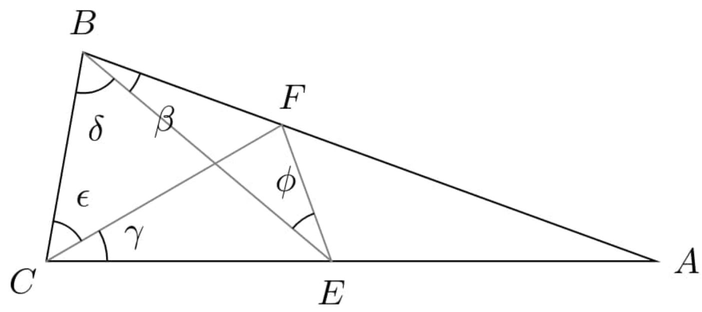
$$x^2 + 4y^2 + 1 = 73$$

on alkuluku ja luku

$$8xy + 2 = 146 = 2 \cdot 73$$

on jaollinen luvulla $x^2 + 4y^2 + 1$, eli tämä lukupari toteuttaa tehtävänannon ehdot. Koska luku 3 ei ole parillinen eikä luku 146 viidellä jaollinen, eivät kohdat b ja d välttämättä pidä paikkaansa.

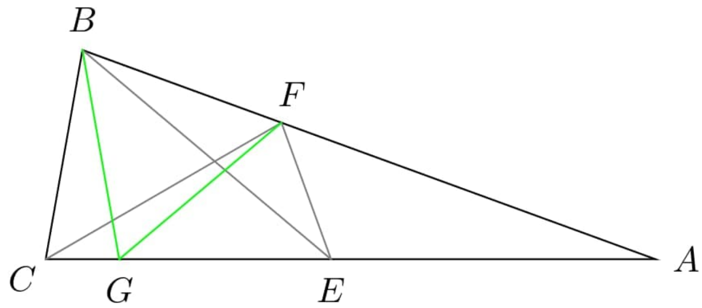
V4. Alla on tehtävästä mittatarkka kuva.



Huomataan, että kuvaan liittyvistä kolmioista ABC, BCF ja EAB ovat tasakylkisiä (huippu mainittu ensin), sillä

$$\begin{cases} \angle ABC = \beta + \delta = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = 50^\circ + 30^\circ = \epsilon + \gamma = \angle BCA \\ \angle BCF = \epsilon = 50^\circ = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 180^\circ - (\beta + \delta) - \epsilon = \angle CFB \\ \angle EAB = \angle CAB = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ = \beta = \angle ABE. \end{cases}$$

Erityisesti $AB = AC, BC = BF$ ja $AE = BE$. Otetaan vielä käyttöön apupiste, joka sijaitsee sivulla AC niin, että kolmio BCG on myös tasakylkinen ja B sen huippu.



Koska $\angle GBC = 180^\circ - 2\angle BCG = 180^\circ - 2\angle BCA = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$, niin $\angle FBG = \angle FBC - \angle GBC = \beta + \delta - 20^\circ = 60^\circ$. Koska lisäksi $BF = BC = BG$, niin kolmio $|BGF|$ on tasasivuinen ja siten $FG = BF = BG$. Kun huomataan vielä, että kolmio GEB on myös tasakylkinen ($\angle GEB = 180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot 20^\circ) = 40^\circ$ ja samoin $\angle EBG = \angle EBC - \angle GBC = \delta - 20^\circ = 40^\circ$), niin saadaan $EG = BG = FG$, joten kolmio GEF on tasakylkinen. Tästä seuraa $\angle GEF = (180^\circ - 40^\circ)/2 = 70^\circ$. Siis $\phi = \angle GEF - \angle GEB = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Vastaus: $\phi = 30^\circ$.

V5. Idea on jakaa yhtälö tekijöihin. Lisäämällä yksi puolittain saadaan yhtälö

$$x^2 + 2x + 1 + (x + 1)y = 101,$$

mikä jakautuu tekijöihin muotoon

$$(x+1)^2 + (x+1)y = 101$$

eli

$$(x+1)(x+1+y) = 101.$$

Luku 101 on alkuluku, ja vasemman puolen molemmat tekijät ovat kokonaislukuja. Siten kokonasiluvut x ja y toteuttavat alkuperäisen yhtälön täsmälleen silloin, kun jokin seuraavista pätee:

$$\begin{cases} x+1 = -101 \\ x+1+y = -1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = -1 \\ x+1+y = -101 \end{cases}$$

tai

$$\begin{cases} x+1 = 1 \\ x+1+y = 101 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x+1 = 101 \\ x+1+y = 1. \end{cases}$$

Jokaisella näistä yhtälöpareista on yksikäsitteinen kokonaislukuratkaisu. Kun nämä yhtälöparit ratkaisee, saamme tulokseksi, että kokonaisluvut x ja y ratkaisevat alkuperäisen yhtälön täsmälleen silloin kun

$$\begin{cases} x = -102 \\ y = 100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 100 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 100 \\ y = -100. \end{cases}$$

V6. Kymmenen rastia riittää, sillä näillä ruudukosta voidaan täyttää kaksi riviä, ja yhden rastin poistaminen jättää aina yhden kokonaisen rivin. Tarkastellaan toisaalta tapausta, jossa rasteja on korkeintaan yhdeksän. Jos asetelmassa on vain kerran viisi rastia peräkkäin, niistä voi sopivan rasin pyyhkimällä saada aikaan lopputuloksen, jossa ei ole rasteja peräkkäin. Vielä triviaalimpi on tilanne, jossa alun perinkään ei ole viittä rastia peräkkäin. Oletetaan siis, että asetelmassa olisi ainakin kaksi viiden peräkkäisen suoraa. Näiden on pakko leikata, sillä muuten rasteja olisi valmiiksi kymmenen. Kahdessa viiden suorassa on siis rasteja yhteensä $5+5-1 = 9$, joten muita rasteja ei voi olla. Siis pyyhkimällä leikkausrasti saadaan kaikki viiden peräkkäiset suorat poistettua. Siis yhdeksän rastia ei riitä.

Täten kymmenen rastia riittää ja tarvitaan.