Lukion matematiikkakilpailun perussarjan ratkaisuja 2019

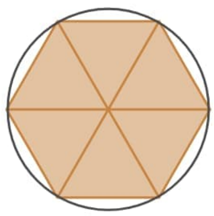
	a	b	c	d
1.	$-$	$+$	$+$	$-$
2.	$-$	$+$	$+$	$-$
3.	$-$	$-$	$+$	$-$
4.	$-$	$+$	$-$	$+$
5.	$+$	$-$	$+$	$+$
6.	$+$	$+$	$+$	$+$

P1. Pihlan työviikon pituus oli aluksi t ja tuntipalkka s, joten viikkopalkka oli ts. Muutosten jälkeen työviikon pituudeksi tuli $t\left((1-\frac{p}{100}\right)$ ja tuntipalkaksi $s\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Pihlan viikkopalkalle saadaan siis yhtälö

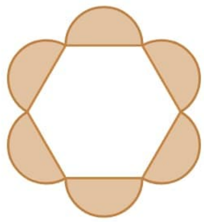
$$\begin{aligned}
&t\left(1-\frac{p}{100}\right)s\left(1+\frac{p}{100}\right) = ts\left(1-\frac{4}{100}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right) = 0{,}96\\
&\Leftrightarrow 1-\frac{p^2}{100^2} = 0{,}96\\
&\Leftrightarrow 10000-p^2 = 9600\\
&\Leftrightarrow p^2 = 400,
\end{aligned}$$

joten $p=20$, koska $p>0$. Siis väitteet b ja c ovat oikein, a ja d sen sijaan väärin.

P2. Säännöllinen kuusikulmio jakautuu tunnetusti kuvion mukaisesti kuudeksi tasasivuiseksi kolmioksi,



joten puoliympyröiden yhteisen halkaisijan pituus on ympyrän Γ säde r ja puoliympyröiden yhteinen säde on $r/2$.



Puoliympyröiden alojen summa on $6 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi r^2$ ja kysytty suhde on siis $3/4 < 0{,}8$. Siis kohdat b ja c ovat oikein, a ja d väärin.

P3. Merkitään $a = 0{,}0246246\ldots$ ja $b = 0{,}0328328\ldots$, jolloin

$$\begin{cases} 10a = 0{,}246246\ldots \\ 10\ 000a = 246{,}246246\ldots \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 10b = 0{,}328328\ldots \\ 10\ 000b = 328{,}328328\ldots, \end{cases}$$

mistä laskemalla erotuksia saadaan

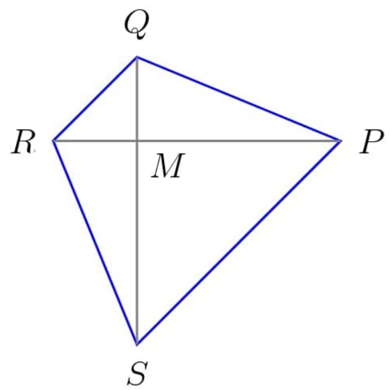
$$9\ 990a = 246 \quad \text{ja} \quad 9\ 990b = 328.$$

Siis $a = 246/9990$ ja $b = 328/9990$. Etsittävä luku on näiden keskiarvo (joka selvästi voidaan kirjoittaa murtolukuna, joten kohta d on väärin)

$$q = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{246+328}{9\ 990} = \frac{576}{19\ 980}.$$

Tämä on kohdan c vastaus; tarkastetaan vielä, että kohdissa a ja b on eri lukuja. Koska $612 > 574$ ja $15\ 000 < 19\ 980$, niin $612/15\ 000 > 574/19\ 980$. Koska $574 > 3 \cdot 120$ ja $19980 < 3 \cdot 7290$, niin $574/19\ 980 > 120/7290$. Siis vain kohta c on oikein, muut ovat väärin.

P4. Tasakylkisen puolisuunnikkaan $PQRS$ sivujen pituudet ovat oletuksen mukaan $PQ = RS = a + 3$, $QR = a - 3$ ja $SP = a + 7$.



Merkitään lävistäjien leikkauspistettä symbolilla M. Tarkastellaan lävistäjien osia $x = MP$, $y = MQ$, $u = MR$ ja $t = MS$. Koska lävistäjät ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, saadaan Pythagoraan lausetta toistuvasti käyttämällä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (a+3)^2 \\ y^2 + u^2 = (a-3)^2 \\ u^2 + t^2 = (a+3)^2 \\ t^2 + x^2 = (a+7)^2. \end{cases}$$

Kahdesta ensimmäisestä ja toisaalta kahdesta seuraavasta yhtälöstä saadaan edelleen

$$\begin{cases} x^2 - u^2 = (x^2 + y^2) - (y^2 + u^2) = (a+3)^2 - (a-3)^2 \\ x^2 - u^2 = (t^2 + x^2) - (u^2 + t^2) = (a+7)^2 - (a+3)^2. \end{cases}$$

Näitä tietoja yhdistelemällä saadaan a:lle yhtälö

$$(a+7)^2 - (a+3)^2 = (a+3)^2 - (a-3)^2,$$

joka kertomalla auki antaa

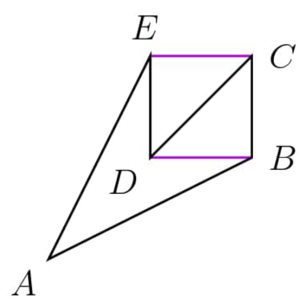
$$14a + 49 - (6a + 9) = 6a + 9 - (-6a + 9),$$

mistä edelleen sieventämällä ja ratkaisemalla saatu toisen asteen yhtälö antaa $a = 10$.

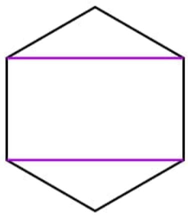
Ratkaisu $a = 10$ on kokonainen (kohdat b ja d oikein). Kohdat a ja c ovat sen sijaan väärin.

Huomautus: Tehtävän voi siis ratkaista olettamatta, että nelikulmio $PQRS$ on puolisuunnikas. Kaikkien ratkaisussa esitettyjen tuntemattomien ratkaisemiseen sen sijaan tarvittaisiin tätä oletusta, ja käyttämällä kolmioiden PMS ja QMR yhdenmuotoisuutta saataisiin $x = t = 17/\sqrt{2}$ ja $y = u = 7/\sqrt{2}$.

P5. a) Tällainen viisikulmio on todellakin olemassa. Lähdetään liikkeelle yhdensuuntaisista janoista, esimerkiksi BD ja CE, missä $B = (2,1), C = (2,2), D = (1,1)$ ja $E = (1,2)$. Asetetaan A sellaiseen paikkaan, että muodostuu viisikulmio $ABCDE$, vaikkapa origoon.

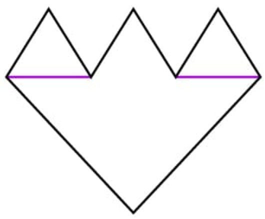


b) Säännöllisen monikulmion lävistäjät eivät välttämättä leikkaa toisiaan, kun sivuja on vähintään kuusi.



c) Kolmiolla ei ole lävistäjiä. Neli- ja viisikulmioiden tapauksessa lävistäjän jommallekummalle puolelle jää vain yksi kärki. Sen tähden kahdella lävistäjällä on pakko olla joko yhteinen kärki tai niiden on leikattava, joten ne eivät voi olla yhdensuuntaisia.

d) Monikulmion lävistäjät voivat olla saman suoran erillisiä osia, kuten seuraava kuva osoittaa.



Kohdat a, c ja d ovat siis tosia, b valetta.

P6. Merkitään $n = 7^{7^7}$. Koska

$$n < 10^{7^7} = 10^{(7^2)^3 \cdot 7} < 10^{50^3 \cdot 7} = 10^{875\ 000} < 10^{10^6},$$

luvussa n on vähemmän kuin miljoona numeroa.

Laskemalla 7:n potensseja modulo 10 huomataan, että $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, joten sen, mihin numero 7^k päättyy, kun $k \in \mathbb{N}$, ratkaisee eksponentin arvo modulo 4. Saadaan

$$7^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4,$$

joten

$$n \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Siis luku n päättyy numeroon 3.

Kolmella jaollisuuden säännön mukaan n on kolmella jaollinen, jos ja vain jos sen numeroiden summa on kolmella jaollinen. Toisaalta selvästi n ei ole kolmella jaollinen, koska sen ainoa alkutekijä on 7. Tästä samasta syystä n ei tietenkään myöskään ole alkuluku. Siis kaikki vaihtoehdot ovat oikein.

P7. Ratkaisemalla d yhtälöstä

$$\frac{d}{a_1} = \frac{a_1 + d}{d} \Leftrightarrow d^2 = (a_1)^2 + a_1 d \Leftrightarrow d^2 - a_1 d - (a_1)^2 = 0$$

saadaan

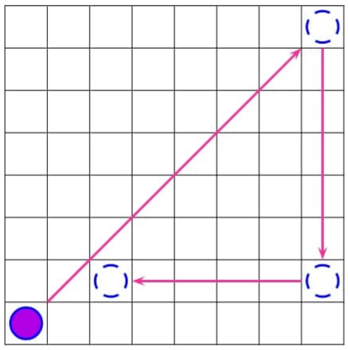
$$d = \frac{1}{2}a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_1)^2 + (a_1)^2} = \frac{1}{2}a_1 \pm \frac{|a_1|}{2}\sqrt{5}.$$

Koska $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5} > 0$ ja sekä a_1 ja d ovat samanmerkkisiä, niin ne ovat välttämättä positiivisia. Siis $d = a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Sijoittamalla tämä tieto yhtälöön $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ saadaan

$$2020+2018\sqrt{5} = a_{2019} = a_1+2018d = a_1+2018a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{a_1}{2}\left(2020 + 2018\sqrt{5}\right),$$

joten $a_1 = 2$ ja $d = 1 + \sqrt{5}$.

P8. Kohdassa b) vastaus on ei: riipumatta Maijan siirroista on pelinappulan x-koordinaatti aina parillinen. Täten Maija ei voi saavuttaa esimerkiksi ruutua $(1, 0)$.



Kohdassa a) vastaus on myönteinen.

Origosta nappulan voi siirtää vinoon ruutuun $(7, 7)$, josta edelleen pystysuoraan ruutuun $(7, 1)$ ja vaakasuoraan $(2, 1)$. Kaikkiaan kolmella nappulan siirrolla syntyy siis ratsun siirto. Peilisymmetrian vuoksi kaikki siirrot origosta ruutuihin $(\pm 2, \pm 1)$ pystyy tekemään kolmella nappulan siirrolla.

Toisaalta käyttämällä edellä kuvailtuja ratsun siirtoja päästään ruudusta $(0, 0)$ ruutuun $(2, 1)$, edelleen ruutuun $(4, 2)$, josta päästään yhdellä siirrolla ruutuun $(-1, 2)$. Täten peilisymmetrian vuoksi päästään myös muihin ruutuihin muotoa $(\pm 1, \pm 2)$.

Siis pystymme tekemään kaikki ratsun siirrot eli siirrot orgista ruutuihin $(\pm 2, \pm 1)$ ja $(\pm 1, \pm 2)$. Tunnetusti shakkiratsulla pääsee äärettömän ruudukon kaikkiin ruutuihin. Symmetrian vuoksi riittää nimittäin osoittaa, että ruutu $(1, 0)$ on tavoitettavissa. Kuva esittää, miten ratsu päätee kyseiseen ruutuun.