Lukion matematiikkakilpailun välisarjan ratkaisuja 2019

	a	b	c	d
1.	$-$	$-$	$-$	$-$
2.	$-$	$+$	$+$	$-$
3.	$+$	$-$	$-$	$+$

V1. Ympyräpohjaisen kartion pohjan säde on 1, kartion korkeus on $\sqrt{3}$, joten tilavuus on $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. Neliöpohjaisen kartion pohjan ala on 4 ja korkeus $\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$. Tilavuus on siis $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Tilavuudet voidaan siis laskea annetuilla tiedoilla, ne eivät ole kokonaislukuja, eivätkä ne ole samoja. Siis kohdat a, b ja c ovat väärin.

Verrataan nyt tilavuuksien suuruutta. Suuruusjärjestys säilyy, vaikka poistettaisiin nimittäjät ja korotettaisiin neliöön. Verrataan siis lukuja $3\pi^2$ ja $16 \cdot 2 = 32$. Koska $\pi < 3{,}2$ ja $3\pi < 10$, on pyramidin tilavuus suurempi. Siis kohda d on myös väärin.

V2. Polynomin $P(x)$ saa tekijöihin, nimittäin $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee $P(x) \geq 1$, joten reaalisia nollakohtia ei ole. Polynomin kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen, sillä

$$P(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = P(x).$$

Viimeisen kohdan yhtälön pystyy ratkaisemaan:

$$P(x) = 7 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 3) = 0,$$

mutta ratkaisut eivät ole rationaalisia. (Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää tunnettua tulosta, jonka nojalla yhtälön $x^4 + x^2 - 6 = 0$ rationaalisten ratkaisujen tulee olla kokonaislukuja, jotka jakavat luvun 6.) Siis kohdat b ja c ovat oikein ja muut väärin.

V3. a) Jos $x, y > 0$ ja $f(x) = f(y)$, niin

$$e^{f(x)-x-1} = f(x) = f(y) = e^{f(y)-y-1} = e^{f(x)-y-1},$$

eli $f(x) - x - 1 = f(x) - y - 1$, eli $x = y$. Väite a siis pitää aina paikkaansa.

b) Jos väite b pitäisi paikkaansa, niin erityisesti olisi $f(1) < 1$. Mutta funktio on määritelty niin, että sen arvot ovat yli 1, joten on oltava $f(1) > 1$. Siten väite b ei voi pitää paikkaansa.

c) Jos olisi olemassa $x > 0$, jolla $f(x) = x + 1$, niin pätisi

$$x + 1 = e^{x+1-x-1} = 1,$$

eli olisi $x = 0$. Ristiriita, joten väite c ei pidä paikkaansa.

d) Olkoon $x > 0$. Koska

$$e^{f(x)-x-1} = f(x) > 1,$$

on

$$e^{f(x)} > e^{x+1},$$

eli $f(x) > x + 1 > x$. Siten väite d pitää varmasti paikkaansa.

V4. Ratkaisemalla d yhtälöstä

$$\frac{d}{a_1} = \frac{a_1 + d}{d} \Leftrightarrow d^2 = (a_1)^2 + a_1 d \Leftrightarrow d^2 - a_1 d - (a_1)^2 = 0$$

saadaan

$$d = \frac{1}{2}a_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_1)^2 + (a_1)^2} = \frac{1}{2}a_1 \pm \frac{|a_1|}{2}\sqrt{5}.$$

Koska $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5} > 0$ ja sekä a_1 ja d ovat samanmerkkisiä, niin ne ovat välttämättä positiivisia. Siis $d = a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Sijoittamalla tämä tieto yhtälöön $a_{2019} = 2020 + 2018\sqrt{5}$ saadaan

$$2020+2018\sqrt{5} = a_{2019} = a_1+2018d = a_1+2018a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{a_1}{2}\left(2020 + 2018\sqrt{5}\right),$$

joten $a_1 = 2$ ja $d = 1 + \sqrt{5}$.

V5. Jos $k-1$ on parillinen, niin huomataan, että pelinappulan x-koordinaatti pysyy aina parillisena. Jos siis tavoiteruudun x-koordinaatti on pariton, kuten ruudulla $(1, 0)$, niin Maija ei koskaan voi saavuttaa sitä. Siis Maija ei voi aina voittaa, jos k on parion.

Osoitetaan nyt, että jos k on parillinen, niin Maija pystyy tavoittamaan minkä tahansa ruudun. Siirtämällä k kertaa oikealle ja $k - 1$ ylös Maija pääsee ruutuun $(k^2 - k, k^2 - k)$. Koska

$$\text{syt}(k^2 - k, k + 1) = \text{syt}(k(k - 1), k + 1) = \text{syt}(k - 1, k + 1) = \text{syt}(2, k + 1) = 1,$$

niin yhdistämällä tätä siirtosarjaa diagonaalisirtoihin ($k + 1$ diagonaalilla) päästään ruutuun $(1, 1)$. Vastaavasti päästään ruutuun $(1, -1)$. Nämä yhdistämällä päästään ruutuun $(2, 0)$ ja vastaavasti ruutuun $(0, 2)$. Koska $k - 1$ ja $k + 1$ ovat parittomia, päästään näiden siirtojen avulla ruutuihin $(\pm 1, 0)$ ja $(0, \pm 1)$. Näiden siirtojen avulla päästään mihin tahansa ruutuun.

V6. Koska x jakaa yhtälön vasemman puolen, niin se jakaa myös luvun 2019. Luvun 2019 alkutekijähajotelman saa laskettua oleavn $2019 = 3 \cdot 673$ (sen varmistaminen, että 673 on alkuluku, vaatii hieman työtä). Täten x on jokin luvuista

$$-2019, -673, -3, -1, 1, 3, 673, 2019.$$

Huomataan, että jos $x = \pm 2019$, niin tulisi olla $x^4y^2 = 2019$ tai $x^4y^2 = 3 \cdot 2019$, mutta yhtälöiden vasemmat puolet ovat jaollisia luvuilla 2019^4 ja oikeat puolet eivät.

Vastaavasti huomataan nopeasti, että tapaukset $x = \pm 673$ eivät anna ratkaisuja (esimerkiksi sen takia, että tällöin x^4y^2 on joko 0 tai yli miljoona, kun taas $2019 - 2x$ on itseisarvoltaan alle 10 000 muttei kuitenkaan nolla).

Tapauksessa $x = 3$ saadaan yhtälö

$$81y^2 = 2013,$$

mikä ei käy, koska vasen puoli on jaollinen yhdeksällä ja oikea puoli ei (koska $2 + 0 + 1 + 3 = 6$ ei ole).

Tapauksessa $x = -3$ saadaan vastaavasti yhtälö

$$81y^2 = 2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2 = 81 \cdot 5^2,$$

mistä saadaan ratkaisut $y = \pm 5$.

Tapauksissa $x = \pm 1$ tutkittavaksi tulee, onko jompikumpi luvuista 2021 ja 2017 neliöluku. Ei ole, koska ne ovat neliölukujen $44^2 = 1936$ ja $45^2 = 2025$ välissä.

Siis ainoat ratkaisut ovat $x = 3, y = \pm 5$.