Lukion matematiikkakilpailu 25. 1. 1997

Ratkaisuehdotuksia

1. *Määritä ne luvut a, joille yhtälöllä*

$$a3^x + 3^{-x} = 3$$

on tasan yksi ratkaisu x.

Vastaus. Luvuiksi a kelpaa $\frac{9}{4}$ ja kaikki epäpositiiviset a (eli $a \leq 0$).

Ratkaisu. Ratkaisun idea on muuttaa ongelma toisen asteen yhtälöksi ja analysoida sitä.

Koska 3^x saa kaikki positiiviset reaalilukuarvot ja jokaisen tasan kerran, ja $3^{-x} = 1/3^x$, tehtävän ratkaisuja ovat kaikki ne luvut a, joille yhtälöllä $at + \frac{1}{t} = 3$ eli

$$at^2 - 3t + 1 = 0$$

on tasan yksi positiivinen juuri.

Jos $a = 0$, kyseessä on ensimmäisen asteen yhtälö jolla on tasan yksi positiivinen ratkaisu $t = \frac{1}{3}$.

Jos $a \neq 0$, kyseessä on toisen asteen yhtälö, jonka diskriminantti on $9-4a$. Yhtälöllä on reaalisia ratkaisuja, jos $9 - 4a \geq 0$ eli jos $a \leq \frac{9}{4}$. Tällöin ratkaisut ovat

$$t = \frac{1}{2a}(3 \pm \sqrt{9 - 4a}).$$

Jos $0 < a < \frac{9}{4}$ yhtälöllä on kaksi positiivista ratkaisua. Jos $a = \frac{9}{4}$, yhtälöllä on tasan yksi ratkaisu ja se on positiivinen. Jos $a < 0$, luvuista $3 \pm \sqrt{9 - 4a}$ yksi on positiivinen ja yksi negatiivinen, ja yhtälöllä on tasan yksi positiivnen juuri.

Tehtävän ratkaisuja ovat siis $a = \frac{9}{4}$ ja kaikki ei-positiiviset luvut a.

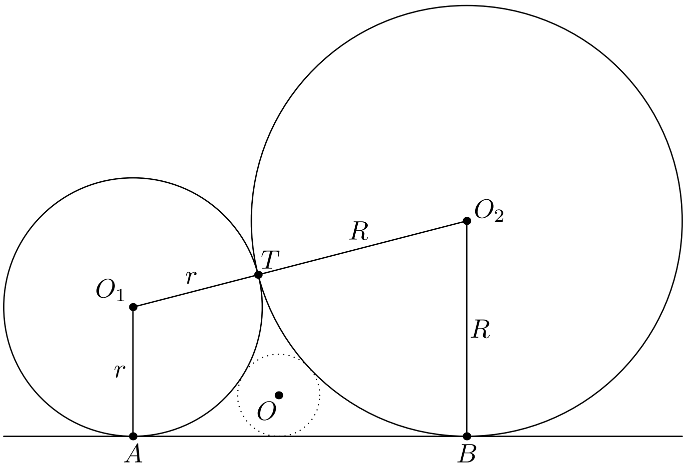
2. *Ympyrät, joiden säteet ovat R ja r, missä $R > r$, sivuavat toisiaan ulkopuolisesti. Ympyröille piirretään yhteinen tangentti, joka ei kulje ympyröiden sivuamispisteen kautta. Tämän tangentin ja ympyröiden rajoittamaan alueeseen piirretään mahdollisimman suuri ympyrä. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde?*

Vastaus. Ympyrän säde on

$$\left(\frac{\sqrt{r}\sqrt{R}}{\sqrt{r} + \sqrt{R}}\right)^2.$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on ratkoa yksitellen pituuksia apupisteiden ja Pythagoraan lauseen avulla.

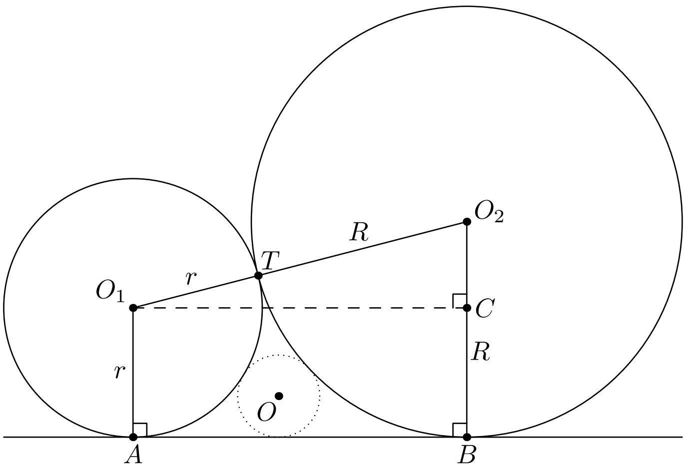
Alla on kuva tehtävästä.



Ympyröiden keskipisteet ovat O_1 ja O_2, sivuamispiste on T, tangentin sivuamispisteet ovat A ja B ja pienen ympyrän keskipiste on O.

Haluamme laskea O-keskisen ympyrän säteen, mutta tämä ei onnistu suoraan. Lasketaan ensiksi kuviosta muita pituuksia.

Janan AB pituuden saa laskettua Pythagoraan lauseella, kun kuvioon lisää apupisteen.



Lisätään piste C.

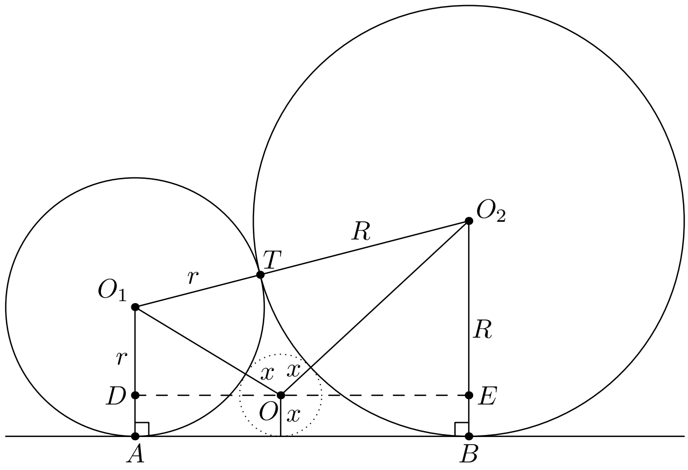
Huomaa suorat kulmat tangentin AB ja säteiden O_1A ja O_2B välillä. Piste C on piirretty kuvaan niin, että O_1CBA on suorakulmio. Nyt $|O_2C| = R - r$, joten Pythagoraan lause kolmioon O_1O_2C sovellettuna antaa

$$|O_1C|^2 = |O_1O_2|^2 - |O_2C|^2 = (r + R)^2 - (R - r)^2 = 4Rr.$$

Koska $|O_1C| = |AB|$, antaa tämä

$$|AB| = \sqrt{4Rr}.$$

Keskitytään sitten pieneen ympyrään. Merkitään sen sädettä x:llä. Kuvioon on taas lisätty muutama apupiste ja -jana, erityisesti suorakulmio $ADEB$, missä DE kulkee pisteen O kautta.



Apupisteet D ja E ja apujanoja.

Pituudet DO ja OE saa laskettua samaan tapaan kuin pituuden AB: Pythagoraan lause kolmioon DOO_1 antaa

$$|DO|^2 = |O_1O|^2 - |DO_1|^2 = (r+x)^2 - (r-x)^2 = 4xr$$

ja kolmiosta DOO_2 saadaan vastaavasti

$$|OE|^2 = |O_2O|^2 - |EO_2|^2 = (R+x)^2 - (R-x)^2 = 4xR.$$

Viimeinen vaihe: Käytetään tietoa $|AB| = |DO| + |OE|$, mistä saadaan yhtälö luvulle x.

$$\begin{aligned}
\sqrt{4Rr} &= \sqrt{4xr} + \sqrt{4xR} \\
\Leftrightarrow \sqrt{rR} &= \sqrt{x}(\sqrt{r} + \sqrt{R}) \\
\Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{rR}}{\sqrt{r} + \sqrt{R}} \\
\Leftrightarrow x &= \left(\frac{\sqrt{rR}}{\sqrt{r} + \sqrt{R}} \right)^2.
\end{aligned}$$

$$x = \frac{rR}{R + r + 2\sqrt{rR}} = \left(\frac{\sqrt{r}\sqrt{R}}{\sqrt{r} + \sqrt{R}} \right)^2.$$

3. *Pyöreän pöydän ääressä on* 12 *ritaria. Jokainen ritari on vihoissa viereisten ritarien, mutta ei muiden ritarien, kanssa. Viisi ritaria on valittava pelastamaan prinsessaa. Yhtään vihamiesparia ei haluta mukaan. Kuinka monella eri tavalla valinta voidaan suorittaa?*

Vastaus. Valinta voidaan tehdä 36 eri tavalla.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on jakaa eri valintatavat tapauksiin sopivalla tavalla niin, että kukin tapaus on helppo käsitellä.

Ehto tarkoittaa, että pelastusoperaatioon ei voi valita ketään vierekkäin istujaa. Valittujen viiden väliin jää siten viisi epätyhjää ritariryhmää. Koska partioon kuulumattomia ritareita on seitsemän, nämä viisi ryhmää muodostuvat joko niin, että

(i) yhdessä on kolme ja muissa yksi ritari, tai

(ii) kahdessa on kaksi ja kolmessa yksi ritari.

Oletetaan, että ritarit istuvat pöydän ympärillä vastapäivään lueteltuina järjestyksessä $R_1, R_2, \ldots, R_{12}$. Jos R_1 on mukana pelastuspartiossa, niin yllä mainittu kolmen ei mukana olevan ritarin joukko voi olla viidessä eri paikassa ja kahden ei mukana olevan ritarin ryhmät $\binom{5}{2}$ eri paikassa. Erilaisia partioita, joissa R_1 on mukana, on siis $5 + 10 = 15$. Missään näistä partioista ei ole mukana R_2. Samalla tavalla kuin edellä voidaan laskea, että partioita, joissa R_2 on mukana, on 15.

Toistaiseksi ei ole laskettu sellaisia partioita, joista puuttuvat sekä R_1 että R_2. Jos tällainen partio muodostuu niin, että yhdessä ei mukana olevien ryhmässä on kolme ritaria (tapaus (i)), niin nämä kolme ovat joko $\{R_1, R_2, R_3\}$ tai $\{R_{12}, R_1, R_2\}$. Jos taas kahden ei mukana olevien ryhmässä on kaksi ritaria (tapaus (ii)), niin toinen näistä ryhmistä on $\{R_1, R_2\}$ ja toinen voidaan valita neljällä eri tavalla. Partioita, joissa ei ole mukana kumpikaan ritareista R_1 ja R_2 on siis kuusi erilaista.

Eri mahdollisuuksia muodostaa pelastuspartio on siis kaikkiaan $15 + 15 + 6 = 36$ kappaletta.

4. *Laske sellaisten nelinumeroisten lukujen, joiden kymmenjärjestelmäesityksessä on vain parittomia numeroita, summa.*

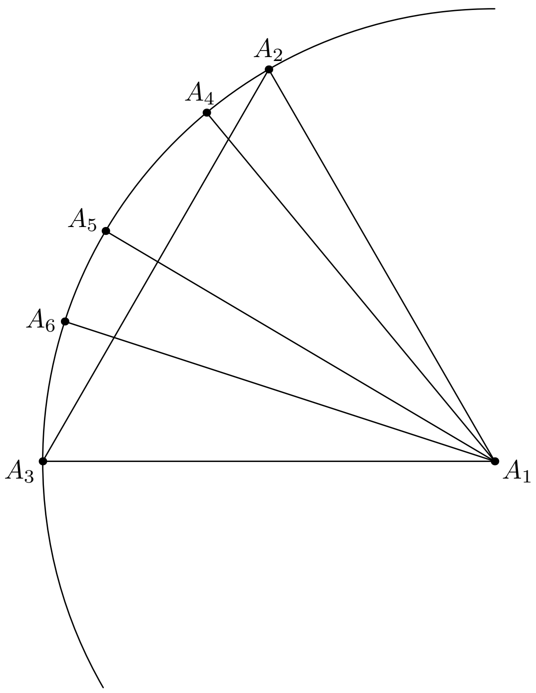
Vastaus. Tällaisten lukujen summa on $1111 \cdot 5^5$ eli 3471875.

Ratkaisu. Parittomia numeroita on viisi $(1, 3, 5, 7, 9)$ ja niiden summa on 25. Kukin numero esiintyy tietyssä paikassa kaikkiaan 5^3:ssa luvussa. Näin ollen kunkin kymmenen potenssin kertoimien summa on $25 \cdot 5^3 = 5^5$. Tehtävässä kysytty summa on siten $1111 \cdot 5^5 = 3471875$.

5. *Sijoita tasoon n pistettä* $(n \geq 3)$ *niin, että minkään kahden pisteen etäisyys ei ylitä yhtä ja täsmälleen n:n pisteparin välinen etäisyys on yksi.*

Ratkaisu. Idea on ensiksi laittaa kolme pistettä tasasivuisen kolmion kärjiksi, ja sitten lisätä kuvioon $n - 3$ pistettä niin, että kukin lisäys luo yhden uuden pisteparin, jossa pisteparin välinen etäisyys on yksi.

Olkoot pisteet $A_1, \ldots, A_n$. Sijoitetaan pisteet A_1, A_2 ja A_3 kärjiksi tasasivuiseen kolmioon, jonka sivun pituus on 1. Jos $n = 3$, sijoittelu on vaadituнlainen. Jos $n > 3$, piirretään A_1-keskinen ympyrä Γ A_2:n ja A_3:n kautta ja sijoitetaan pisteet $A_4, \ldots, A_n$ numerojärjestyksessä mielivaltaisesti Γ:n lyhemmälle kaarelle $\widehat{A_2 A_3}$.



Esimerkki sijoittelusta tapauksessa $n = 6$.

Nyt kolme janaa A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 sekä $n-3$ janaa $A_1A_i, i = 4, 5, \ldots, n$ ovat kaikki yhden pituisia, eli yhden pituisia janoja on ainakin n.

Tarkistetaan vielä tarkasti, että kaikkien muiden pisteparien välinen etäisyys on alle yksi, mikä ratkaisee tehtävän. (Kuvan perusteella tämä tuntuu järkeenkäyvältä.)

Todistetaan ensiksi, että $A_2A_i < 1$ ja $A_3A_i < 1$ kaikilla $i \geq 4$. Kulma $\angle A_2A_iA_3$ on tylppä (kehäkulmalauseen nojalla $\angle A_2A_iA_3 = 150°$), joten A_2A_3 on kolmion $A_2A_iA_3$ pisin sivu. Tästä seuraa, että $A_2A_i < 1$ ja $A_3A_i < 1$.

Todistetaan sitten, että $A_iA_j < 1$ kaikilla $4 \leq i < j$. Nyt kulma $\angle A_2A_iA_j$ on tylppä, joten A_2A_j on kolmion $A_2A_iA_j$ pisin sivu. Edellä todistettiin, että $A_2A_j < 1$, joten nyt myös $A_iA_j < 1$.