Lukion matematiikkakilpailu 30. 1. 1998

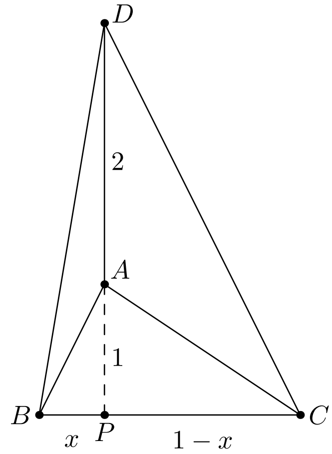
Ratkaisuehdotuksia

1. *Osoita, että pisteet A, B, C ja D voidaan sijoittaa tasoon niin, että nelikulmion $ABCD$ pinta-ala on kaksi kertaa niin suuri kuin nelikulmion $ADBC$.*

Ratkaisu.
Sijoitetaan B ja C niin, että $BC = 1$. Olkoon P sellainen piste, että $BP = x$. Piirretään P:n kautta BC:n normaali, ja valitaan siltä pisteet A ja D niin, että $AP = 1$ ja $AD = 2$. Merkitään kuvion $\mathcal{F}$ alaa $|\mathcal{F}|$. Nyt $|ABC| = \frac{1}{2}$, $|ADB| = x$ ja $|ACD| = 1 - x$. Koska $|ABCD| = |ABC| + |ACD| = \frac{1}{2} + 1 - x$ ja $|ADBC| = |ADB| + |ABC| = x + \frac{1}{2}$, tehtävän ehto toteutuu, kun

$$\frac{3}{2} - x = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

eli kun $x = \frac{1}{6}$.



(Kuva ei mittakaavassa.)

Kommentti. Tehtävään on monenlaisia ratkaisuja.

Tehtävässä on aluksi hyvin paljon valinnanvaraa siihen, miten A, B, C ja D voidaan valita. Ratkaisussa vaihtoehtojen runsautta karsitaan ensiksi melko sattumanvaraisilla päätöksillä: valitaan A ja D pisteen P normaalilta, $|AP| = 1, |AD| = 2$. Kun valinnanvaraa on enää vain vähän (mistä päin janaa BC piste P valitaan), mietitään tarkemmin miten valinta kuuluu toteuttaa, jotta haluttu ehto toteutuu. Tämä tehtiin pystyttämällä yhtälö luvulle x.

Ensimmäinen idea (sattumanvaraiset päätökset) on hyvä alkuun pääsemiseksi: koska vaihtoehtoja pisteiden A, B, C ja D valinnalle on niin paljon, kannattaa tutkia yksinkertaisempia tapauksia ensiksi. Toisaalta ihan vain arvaamalla voi olla vaikea löytää ratkaisua, mihin auttaa toisen idean (yhtälön pystyttämisen) systemaattisuus.

2. *Kilpailutoimikunnassa on* 11 *jäsentä. Kilpailutehtäviä säilytetään hyvässä tallessa lukkojen takana. Avaimia on jaeltu toimikunnan jäsenille niin, että ketkä tahansa kuusi jäsentä voivat avata lukot, mutta ketkään viisi eivät riitä niiden avaamiseen. Kuinka monta lukkoa tarvitaan vähintään, ja kuinka monta avainta tällöin on kullakin toimikunnan jäsenellä?*

Vastaus. Lukkoja tarvitaan vähintään 462 ja kullakin toimikunnan jäsenellä on oltava vähintään 252 avainta.

Ratkaisu. Toimikunnasta voidaan valita $\binom{11}{5} = 462$ erilaista viiden joukkoa. Kutakin tällaista joukkoa kohden on oltava lukko, johon kenenkään joukon jäsenen avain ei sovi. Koska kahdella eri viiden joukolla on aina mahdollisuus yhdessä avata kaikki lukot, on eri viiden joukkoja kohden oltava eri lukot, joita joukon jäsenet eivät saa auki. Lukkoja on täten ainakin 462.

Jokaisella toimikunnan jäsenellä J on oltava avain jokaiseen sellaiseen lukkoon, jota sellainen viiden joukko, johon J ei kuulu, ei pysty avaamaan. Viiden joukkoja, joihin J ei kuulu, on $\binom{10}{5} = 252$ kappaletta. Jokaisella jäsenellä on täten oltava ainakin 252 avainta.

Osoitetaan vielä, että löytyy ratkaisu, jossa lukkoja on tasan 462 ja kullakin jäsenellä on tasan 252 avainta. Hankitaan 462 lukkoa, nimetään ne toimikunnan viisijäsenisten osajo+ukkojen mukaan ja jaetaan avaimet niin, että jokainen jäsen saa avaimen kaikkiin niihin 252 lukkoon, jotka liittyvät sellaisiin viiden jäsenen joukkoihin, joihin kyseinen jäsen ei kuulu. Silloin yksikään viiden jäsenen joukko ei voi avata kaikkia lukkoja. Olkoon sitten $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ mielivaltainen kuuden jäsenen joukko. Jokainen lukko liittyy johonkin viiden jäsenen joukkoon S'. Mutta koska S:ssä on aina jokin joukkoon S' kuulumaton jäsen, S:n jäsenet pystyvät avaamaan jokaisen tällaisen lukon.

Kommentti. Ratkaisun jälkipuoliskoa eli sopivien lukkojen ja avaimien keksimistä varten kannattaa miettiä, milloin ratkaisun alkupuolen arviot ovat parhaat mahdolliset. Jos lukkoja on tasan 462, niin ratkaisun ensimmäisen kappaleen nojalla kutakin viiden jäsenen joukkoa kohden on olemassa vain yksi lukko, jota he eivät saa auki. Tämä vihjaa siihen, että assosioidaan lukot ja viiden hengen joukot toisiinsa.

3. *Voiko jonosta* $1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ *valita geometrisen, päättyvän tai päättymättömän, jonon, jonka peräkkäisten jäsenten suhde ei ole* 1 *ja jonka summa on* $1/5$*?*

Vastaus. Ei voi.

Ratkaisu. Alla on kaksi erilaista ratkaisua. Ensimmäinen ratkaisu tutkii, kuinka suuri on jonon ensimmäinen, toinen ja kolmas jäsen. Toinen ratkaisu tutkii, mikä on geometrisen lukujonon suhdeluku ja onko se päättymätön vai ei.

Molemmat ratkaisut käyttävät tietoa

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$$

ja tästä seuraavia tietoja kuten

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{4}.$$

1. ratkaisu. Jos geometrisen jonon ensimmäinen jäsen olisi $\frac{1}{2}$ tai $\frac{1}{4}$, olisi sen summa yli $\frac{1}{5}$. Tämä ei käy. Toisaalta jos ensimmäinen jäsen olisi $\frac{1}{16}$ tai pienempi, olisi jonon summa enintään

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{8} < \frac{1}{5},$$

mikä ei myöskään käy. Siis jonon ensimmäinen jäsen on $\frac{1}{8}$.

Jonon loppujen termien summan tulee siis olla $\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$. Tutkitaan sitten, mikä on jonon toinen termi. Arvioidaan kuten edellä: toinen termi ei voi olla pienempi kuin $\frac{1}{16}$, koska tällöin jonon termien summa olisi enintään

$$\frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{1}{16} < \frac{3}{40}.$$

Seuraava termi on siis $\frac{1}{16}$.

Jonon loppujen termien summan tulee siis olla $\frac{3}{40} - \frac{1}{16} = \frac{1}{80}$. Jonon seuraavan termin tulee siis olla alle $\frac{1}{32}$. Tämä ei kuitenkaan käy: jonon tulee olla geometrinen ja sen ensimmäiset jäsenet ovat $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{16}$, joten joko jono päättyy heti (mikä ei käy) tai seuraava termi on $\frac{1}{32}$. Olemme valmiit.

2. ratkaisu. Kuten ensimmäisessä ratkaisussa, jonon suurin termi on $\frac{1}{8}$.

Todetaan ensiksi, että jonon suhdeluku on $\frac{1}{2}$. Muussa tapauksessa jonon jäsenten summa olisi enintään

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{6} < \frac{1}{5},$$

mikä ei käy.

Todetaan sitten, että jono päättyy. Muussa tapauksessa jonon termien summa olisi

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5},$$

mikä ei käy.

Siis jono päättyy ja sen suhdeluku on $\frac{1}{2}$, eli jonon termien summa on muotoa

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{8}\frac{2^{p+1}-1}{2^p}.$$

Jotta tällainen murtoluku sipustuisi luvuksi $\frac{1}{5}$, sen nimittäjässä olisi oltava tekijänä 5. Näin ei ole, joten halutunlaista jonoa ei ole.

4. *Neliössä, jonka sivu on* 1, *on* 110 *pistettä. Osoita, että jotkin neljä näistä sijaitsevat ympyrässä, jonka säde on* 1/8.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on peittää neliö 36 kappaleella 1/8-säteisiä ympyröitä ja käyttää laatikkoperiaatetta.

Ympyrään, jonka säde on $\frac{1}{8}$, voidaan piirtää neliö, jonka sivu on $\frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{4 \cdot 1{,}5} = \frac{1}{6}$. Oletetaan, että jokaisessa $\frac{1}{8}$-säteisessä ympyrässä olisi enintään kolme annetuista pisteistä. Silloin missään $\frac{1}{6}$-sivuisessa neliössä ei olisi kuin enintään kolme annetuista pisteistä. Mutta 1-sivuinen neliö voidaan jakaa 6×6:ksi eli 36:ksi $\frac{1}{6}$-sivuiseksi neliöksi. Pisteitä voisi siis olla enintään $36 \cdot 3 = 108$ kappaletta. Ristiriita osoittaa vastaoletuksen vääräksi.

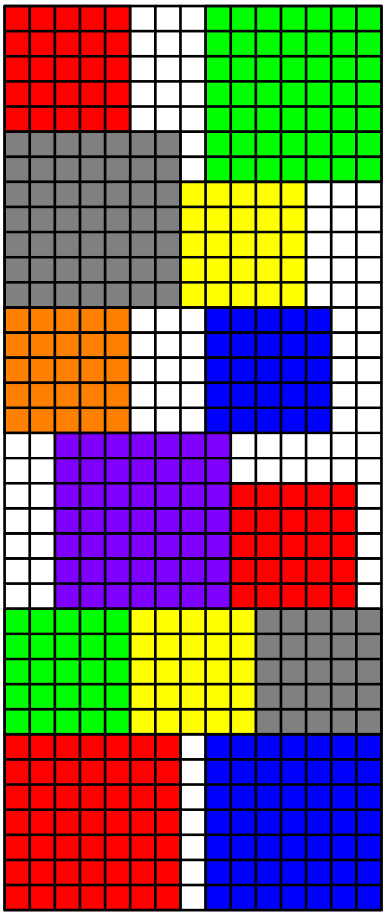
5. 15×36*-ruudukkoa peitetään neliölaatoilla. Neliölaattoja on kahdenkokoisia; sivun pituus voi olla 7 tai 5. Laattojen tulee piettää täysiä yksikköneliöitä, eivätkä ne saa mennä päällekkäin. Kuinka monta ruutua laatat voivat peittää?*

Vastaus. Laatat voivat peittää enimmillään 525 ruutua.

Ratkaisu. Todetaan ensiksi, että on mahdollista peittää $15 \cdot 35 = 525$ ruutua: 15×35-ruudukon voi peittää 5×5-laatoilla. Vaikeampi puoli on osoittaa, ettei suurempaa määrää saada peitettyä.

Todistetaan sitten, ettei suurempaa määrää ruutuja voi peittää. Esitetään kaksi ratkaisua. Ensimmäisen ratkaisun idea on tutkia, miten laatat sijoittuvat ruudukon 15-pituisen reunan lähistöllä. Toisen ratkaisun idea on tutkia, kuinka paljon eri tyyppisiä laattoja käytetään.

1. ratkaisu. Haluamme osoittaa, että ruudukkoon jää vähintään 15 tyhjää ruutua. Asetetaan ruudukko pystyyn niin, että ruudukon leveys on 15 ruutua ja korkeus on 36 ruutua. Voimme olettaa, ettei mitään laattaa saa siirrettyä alaspäin ("painovoima vetää laattoja alaspäin").



Oletetaan, että mitään laattaa ei saa vedettyä alaspäin.

Kysymys kuuluu: miltä ruudukon pohjalla näyttää?

Huomataan ensiksi, että jos ruudukon alarivillä on jokin tyhjä ruutu, niin sen yläpuolella olevat neljä ruutua ovat myös tyhjiä: jos ne eivät olisi tyhjiä, niin niitä peittää laatta, jota voisi vetää alaspäin. Tästä seuraa, että jos ruudukon alarivillä on vähintään kolme tyhjää ruutua, niin ruudukossa on yhteensä vähintään 15 tyhjää ruutua, ja olemme valmiit.

Ruudukon alarivistä on siis peitetty vähintään 13 ruutua. Ei ole mahdollista, että alariviltä on peitetty tasan 13 ruutua. Ruutuja on siis peitetty joko 14 ruutua kahden 7×7-laatan toimesta (kuten kuvassa) tai kaikki 15 ruutua kolmen 5×5-laatan toimesta.

Kummassakin tapauksessa voimme siirtyä tutkimaan ruudukkoa, joka on 7 tai 5 ruutua matalampi kuin alkuperäinen 15×36 -ruudukko. Voimme soveltaa tälle pienemmälle ruudukolle samaa logiikka: sen pohjalta löytyy kaksi 7×7-laattaa tai kolme 5×5-laattaa. Näin jatketaan

Koko 15×36-ruudukko koostuu siis viiden tai seitsemän ruudun korkuisista "kerroksista". Jos kerros on seitsemän korkuinen, niin siitä löytyy seitsemän tyhjää ruutua. Jos siis seitsemän korkuisia kerroksia on vähintään kolme, niin tyhjiä ruutuja on vähintään $3 \cdot 7 = 21$, ja olemme valmiit.

Tutkitaan siis lopuksi vielä kolmea tapausta sen mukaan, kuinka monta seitsemän korkuista kerrosta ruudukossa on.

- Jos seitsemän korkuisia kerroksia on 0, niin viiden korkuisia kerroksia on 7. Siis ruudukon ylärivi jää tyhjäksi, eli tyhjiä ruutuja on 15.
- Jos seitsemän korkuisia kerroksia on 1, niin viiden korkuisia kerroksia on $(36-7)/5 = 29/5$ pyöristettynä alaspäin eli 5. Tyhjiä rivejä jää siis $36-7-25 = 4$, eli tyhjiä ruutuja on ainakin 60.
- Jos seitsemän korkuisia kerroksia on 2, niin viiden korkuisia kerroksia on $(36 - 14)/5 = 22/5$ pyöristettynä alaspäin eli 4. Tyhjiä rivejä jää siis $36 - 14 - 20 = 2$, eli tyhjiä ruutuja on ainakin 30.

Olemme valmiit.

2. ratkaisu. Oletetaan, että laatoituksessa käytetään a kappaletta 7×7-laattoja ja b kappaletta 5×5-laattoja. Peitettyjä ruutuja on yhteensä $49a + 25b$. Koska $49a + 25b \leq 540$, saadaan

$$a \leq 11 \quad \text{ja} \quad b \leq 21.$$

Tutkitaan, mitä arvoja $49a + 25b$ voi saada. Tätä varten kirjoitetaan

$$49a + 25b = 50a + 25b - a = 25(2a + b) - a.$$

Nyt jos $2a + b \leq 21$, niin $25(2a + b) - a \leq 25 \cdot 21 = 525$, mistä väite seuraa.

Toisaalta ei voi päteä $2a + b \geq 23$. Tällöin nimittäin

$$25(2a + b) - a \geq 25 \cdot 23 - a \geq 575 - 11 > 540.$$

Tutkitaan vielä tapaus $2a + b = 22$. Tällöin peitettyjen ruutujen määrä on $550 - a$. Koska ruutuja on kaikkiaan 540, tulee täten päteä $a \geq 10$. Siis $a = 10$ tai $a = 11$. Ehdon $2a + b = 22$ nojalla tällöin pätee $b = 2$ tai $b = 0$.

Oikeasti nämä tapaukset eivät kuitenkaan ole mahdollisia. Jos $a = 11$ ja $b = 0$, tulisi yhdellätoista 7×7-laatoilla saada peitettyä $11 \cdot 49 = 539$ ruutua, eli vain yksi ruuduista jää tyhjäksi. Huomataan kuitenkin, että jos laatoittamiseen käytetään vain 7×7-laattoja, niin jokaisella ruudukon 36 vaakarivistä on vähintään yksi tyhjä ruutu, eli tämä ei käy. Jos $a = 10$ ja $b = 2$, laatat peittäisivät $10 \cdot 49 + 2 \cdot 25 = 540$ ruutua eli kaikki ruudut. Ruudukon 36 vaakarivistä vähintään 26 kuitenkin ovat sellaisia, joilla ei esiinny minkään 5×5-laatan ruutuja, ja näillä vaakariveillä on kullakin vähintään yksi tyhjä ruutu. Tämäkään tapaus ei siis käy.