Lukion matematiikkakilpailu 22.1.1999

Ratkaisuehdotuksia

1. *Osoita, että yhtälöllä*

$$x^3 + 2y^2 + 4z = n$$

on kokonaislukuratkaisu (x, y, z) *kaikilla kokonaisluvuilla* n.

Ratkaisu. Luku n on jotain seuraavista neljästä muodosta: $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ tai $n = 4k + 3$. Jos $n = 4k$, yhtälön ratkaisu on esimerkiksi $(x, y, z) = (0, 0, k)$. Jos $n = 4k + 1$, eräs ratkaisu on $(1, 0, k)$. Jos $n = 4k + 2$, ratkaisu voi olla $(0, 1, k)$. Jos $n = 4k + 3 = 4(k + 1) - 1$, ratkaisu voi olla $(-1, 0, k + 1)$.

Kommentti. Tehtävää on siis luonnollista miettiä *kongruenssien* kautta ja erityisesti modulo 4. Kysymys on oleellisesti yhtälöstä $x^3 + 2y^2 \equiv n \pmod 4$.

2. *Oletetaan, että positiiviset luvut* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *muodostavat aritmeettisen lukujonon; siis* $a_{k+1} - a_k = d$ *kaikilla* $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. *Osoita, että*

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}. \tag{1}$$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on todistaa väite induktiolla. Induktioaskel otetaan laskemalla.

Aritmeettisen jonon ominaisuuksien perusteella $a_n = a_1 + (n-1)d$ ja $a_{n+1} = a_1 + nd$. Todistetaan väite induktiolla. Väitteen totuus on ilmeinen, kun $n = 2$. Oletetaan sitten, että (1) on voimassa.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}} &= \frac{n-1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_na_{n+1}} \\
&= \frac{1}{a_n}\left(\frac{n-1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + nd}\right) \\
&= \frac{1}{a_n} \cdot \frac{(n-1)(a_1 + nd) + a_1}{a_1a_{n+1}} \\
&= \frac{n}{a_n} \cdot \frac{a_1 + (n-1)d}{a_1a_{n+1}} \\
&= \frac{n}{a_1a_{n+1}}.
\end{aligned}$$

(1) on siis tosi, kun n korvataan $(n+1)$:llä. Induktioaskel on otettu ja väite todistettu.

Kommentti. Tapauksessa jossa $a_i = i$ kaikilla i väite (1) sanoo, että

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}.$$

Tämä on melko tunnettu summa, jonka voi laskea idealla nimeltä *teleskooppisumma*: summan voi kirjoittaa muodossa $(1/1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \ldots (1/(n-1) - 1/n)$, mikä sieventämisen jälkeen antaa tuloksen $1 - 1/n = (n-1)/n$. Tehtävän väitteen (1) voi tulkita tämän summan yleistyksenä. Myös sen voi todistaa teleskooppisumman kautta.

3. *Selvitä, montako alkulukua on jonossa*

$$101, 10101, 1010101, \ldots$$

Vastaus. Vain yksi, nimittäin 101.

Ratkaisu. Ratkaisun pääidea on esittää lukujonon jäsenet geometrisena summana. Nämä geometriset summat saadaan tulomuotoon, mistä seuraa, ettei jäsenet ole alkulukuja.

101 on alkuluku. Osoitetaan, että kaikki muut jonon luvut ovat yhdistettyjä lukuja.

Jos luvussa on parillinen määrä ykkösiä, se on jaollinen luvulla 101 (esimerkiksi $1010101 = 1010000 + 101$ on jaollinen 101:llä), eikä siten ole alkuluku.

Jos luvussa on pariton määrä ykkösiä edetään seuraavasti. Luvut ovat muotoa $a_k = 100^0 + 100^1 + \ldots + 100^k$, $k > 1$, kun $k+1$ on luvussa olevien ykkösten lukumäärä. Nyt

$$100^0 + 100^1 + \ldots + 100^k = \frac{100^{k+1} - 1}{99}.$$

Koska k on pariton, on oikea puoli kahden neliön erotus: voimme kirjoittaa $k+1 = 2p$, jolloin

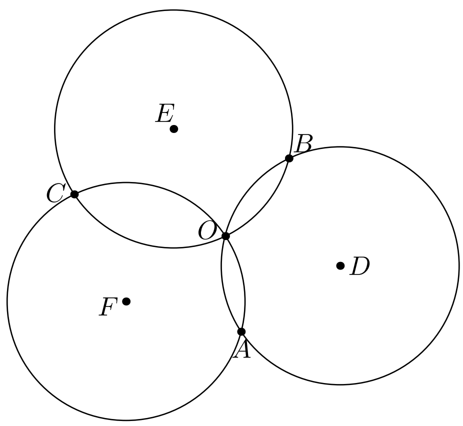
$$\frac{100^{2p} - 1}{99} = \frac{(100^p - 1)(100^p + 1)}{99}.$$

Koska $k > 1$, pätee $p > 1$, joten molemmat tulon tekijät ovat suurempia kuin 99. Täten a_k jakautuu ainakin kahdeksi ykköstä suuremmaksi tekijäksi, eikä siten ole alkuluku.

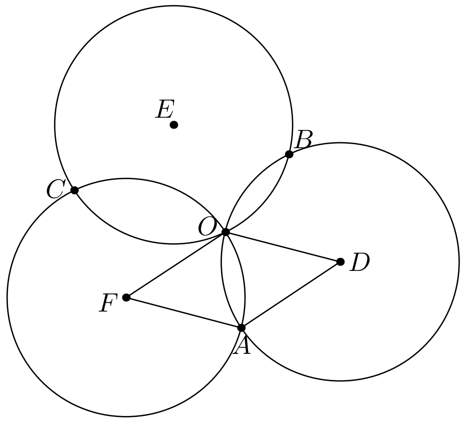
4. Kolmella 1-säteisellä ympyrällä on yhteinen piste O. Ympyrät leikkaavat lisäksi toisensa pareittain pisteissä A, B ja C. Osoita, että pisteet A, B ja C ovat saman 1-säteisen ympyrän kehällä.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on, että kuviosta löytyy paljon neljäkkäitä ja siten yhtä suuria pituuksia.

Alla kuvassa ympyröiden keskipisteitä merkitään kirjaimin D, E, F.



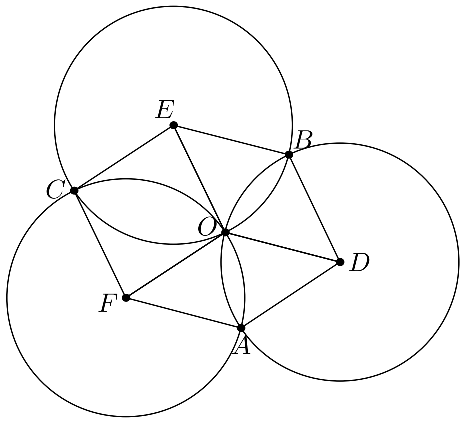
Todetaan ensiksi, että $DAFO$ on neljäkäs. (Neljäkäs on suunnikas, jonka jokainen sivu on yhtä pitkä.)



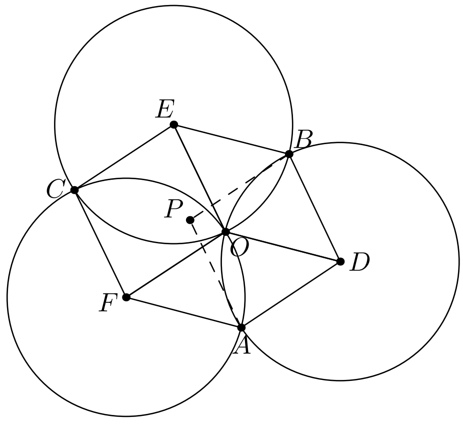
$DAFO$ on neljäkäs.

Nimittäin nelikulmion $DAFO$ kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, koska kunkin sivun pituus on 1. Lisäksi kolmiot FOD ja FAD ovat yhteneviä (sss) ja tasakylkisiä, mistä seuraa sivujen yhdensuuntaisuudet.

Symmetrisesti myös $DBEO$ ja $ECFO$ ovat neljäkkäitä.



Osoitetaan sitten itse väite. Lisätään kuvioon vielä piste P, jolla $ADBP$ on neljäkäs.



Nyt P on yhden päässä pisteistä A ja B. Piste P on oikeastaan myös yhden päässä pisteestä C: käyttämällä kuvion neljäkkäitä saadaan

$$PB||AD||FO||CE,$$

eli PB ja CE ovat yhdensuuntaisia. Koska lisäksi $PB = CE = 1$, niin myös $PBEC$ on neljäkäs. Erityisesti $PC = 1$.

Siis piste P on yhden päässä pisteistä A, B ja C, eli A, B ja C ovat P-keskisen 1-säteisen ympyrän kehällä.

5. *Tavallista dominolaattaa voidaan pitää lukuparina* (k, m)*, missä luvut* k *ja* m *voivat saada arvoja* $0, 1, 2, 3, 4, 5$ *ja* 6*. Parit* (k, m) *ja* (m, k) *määrittelevät saman laatan. Erityisesti pari* (k, k) *määrittelee dominolaatan. Sanomme, että kaksi dominlaattaa sopii yhteen, jos niissä esiintyy sama luku. Yleistetyissä* n*-dominolaatoissa* m *ja* k *voivat saada arvoja* $0, 1, \ldots, n$*. Kuinka suuri on todennäköisyys, että kaksi satunnaisesti valittua* n*-dominolaattaa sopii yhteen?*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on laskea kullekin dominolaatalle, kuinka monta sen kanssa yhteensopivaa dominolaattaa on olemassa. Laatat muotoa (k, k) tutkitaan erikseen. Tämän jälkeen lasketaan haluttu todennäköisyys.

Tehtävän sanamuoto antaa mahdollisuuksia hiukan eri tulkintoihin. Teksti ei kerro, mistä joukosta “satunnainen valinta” tapahtuu, eli onko esimerkiksi mahdollista, että kaksi satunnaisesti valittua laattaa olisivat samat. Ratkaistaan tehtävä olettaen, että jokaista kuvailtua laattaa on tasan yksi kappale.

Koska (k, m) ja (m, k) ovat sama laatta, voidaan olettaa, että $m \le k$. Laattoja, joissa $m < k$, on silloin $\binom{n+1}{2}$ ja laattoja, joissa $m = k$ on $n + 1$ kappaletta; laattoja on yhteensä

$$\binom{n+1}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

kappaletta.

Laatat muotoa (m, m) ovat yhteensopiva n muun laatan kanssa. On nimittäin $n + 1$ laattaa, joissa on luku m, ja yksi näistä on laatta (m, m).

Laatat muotoa (m, k), $m < k$ ovat yhteensopivia $2n$ muun laatan kanssa. On nimittäin $n + 1$ laattaa, joissa on luku m ja $n + 1$ laattaa, joissa on luku k. Yhdessä laatassa (nimittäin laatassa (m, k)) on molemmat näistä luvuista, eli kokonaisuudessaan näitä laattoja on $2n + 1$. Yksi näistä laatoista on (m, k) itse, eli laatta (m, k) on yhteensopiva $2n$ muun laatan kanssa.

Täten todennäköisyys sille, että kaksi satunnaista laattaa ovat yhteensopivia on

$$\frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot \frac{n}{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot \frac{2n}{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1}.$$

Tässä ensimmäinen summattava vastaa todennäköisyyttä “ensimmäinen valittu laatta on muotoa (m, m) ja toinen laatta on sen kanssa yhteensopiva” ja toinen summattava todennäköisyyttä “ensimmäinen valittu laatta on muotoa (m, k) ja toinen laatta on sen kanssa yhteensopiva”. Huomaa, että ensimmäisen laatan valinnan jälkeen toiselle laatalle on yksi mahdollisuus vähemmän. Sievennysten jälkeen todennäköisyydeksi saadaan

$$\frac{4(n+1)}{(n+2)(n+3)}.$$

Mahdollinen tulkinta olisi myös se, että laattoja on äärettömän paljon ja kaikkien esiintymistodennäköisyys on sama. Silloin on mahdollista, että kaksi umpimähkäisesti valittua laatttaa ovat samat ja itse kunkin laattatyypin esiintymistodennäköisyys on $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$. Tässä tapauksessa kysytty todennäköisyys olisi vastaavaan tapaan

$$\frac{4(n+1)}{(n+2)(n+3)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$