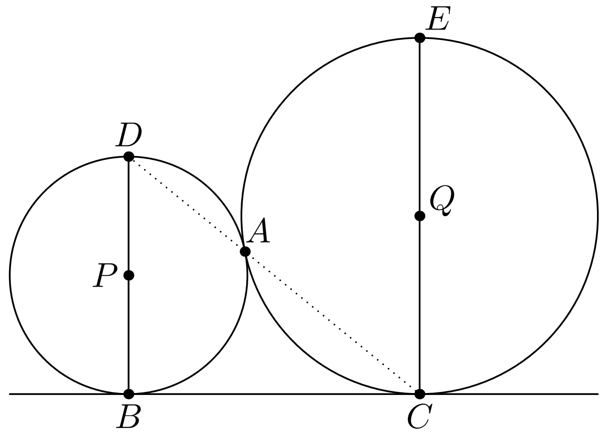
Lukion matematiikkakilpailu
Loppukilpailu 28. tammikuuta 2000
Ratkaisuhahmotelmia

1. Kaksi ympyrää sivuaa ulkopuolisesti toisiaan pisteessä A. Ympyröiden yhteinen tangentti sivuaa toista ympyrää pisteessä B ja toista pisteessä C ($B \neq C$). Janat BD ja CE ovat ympyröiden halkaisijoita. Todista, että pisteet D, A ja C ovat samalla suoralla.

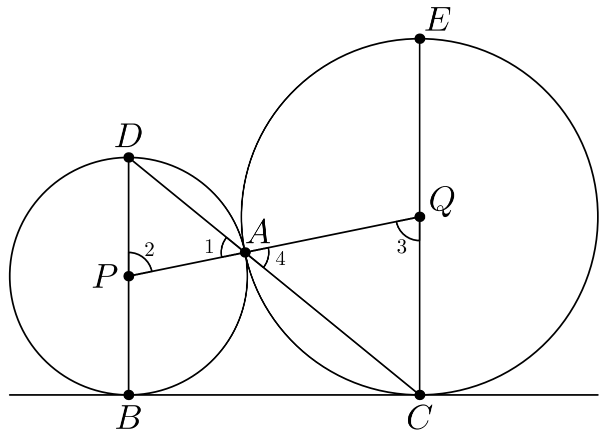
Ratkaisu. Ideana on laskea kulmia hyödyntäen tasakylkisiä kolmioita ja yhdensuuntaisuutta.

Olkoot P ja Q ympyröiden keskipisteet (kuten kuvassa).



Kuva tilanteesta.

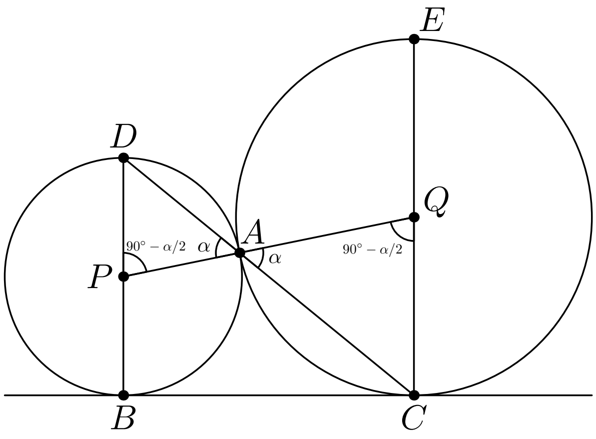
Todistus perustuu kulmien laskemiseen seuraavan "polun" kautta.



Lasketaan kulmia seuraavassa järjestyksessä.

Merkitään $\angle DAP = \alpha$ (kuvan kulma 1). Tasakylkisestä kolmiosta APD saadaan $\angle APD = 90^\circ - \alpha/2$ (kuvan kulma 2). Koska P, A ja Q ovat samalla suoralla ja

BD ja CE ovat yhdensuuntaisia (molemmat ovat kohtisuorassa suoraa BC vasten), samankohtaiset kulmat antavat $\angle AQC = \angle APD = 90^\circ - \alpha/2$ (kuvan kulma 3). Tasakylkisestä kolmiosta CAQ saadaan nyt $\angle CAQ = \alpha/2$ (kuvan kulma 4). Tämä todistaa, että D, A ja C ovat samalla suoralla.



Lasketut kulmat merkittynä kuvaan.

2. Todista, että luvun $(3+\sqrt{5})^n$ kymmenjärjestelmäesityksen kokonaisosa on aina pariton luku, oli n mikä hyvänsä positiivinen kokonaisluku.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia myös lukua $(3-\sqrt{5})^n$. Tämä luku toisaalta "täydentää" lukua $(3+\sqrt{5})^n$ ja toisaalta on pieni ($0 < 3-\sqrt{5} < 1$).

Binomikaavan perusteella

$$(3+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (\sqrt{5})^{n-k} = a + b\sqrt{5}$$

joillakin positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b. Lisäksi

$$(3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} (\sqrt{5})^{n-k} = a - b\sqrt{5}.$$

(Binomikehitelmä tuottaa $\sqrt{5}$-termejä parittomilla potensseilla.) Siis $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2a$. Mutta koska $2 < \sqrt{5} < 3$, on $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$, joten $2a - 1 < (3+\sqrt{5})^n < 2a$, ja luvun $(3+\sqrt{5})^n$ kokonaisosa on $2a-1$ eli pariton luku.

Kommentti. Tehtävää voi tutkia myös *lineaaristen rekursioiden* näkökulmasta. Jos nimittäin määritellään $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$, niin lineaaristen rekursioiden teorian perusteella luvut a_n toteuttavat polynomia $(x-(3-\sqrt{5}))(x-(3+\sqrt{5})) = x^2 - 6x + 4$ vastaavan yhtälön $a_{n+2} = 6a_{n+1} + 4a_n$. Koska $a_0 = 2$ ja $a_1 = 6$, seuraa tästä että kaikki luvut a_n ovat parillisia kokonaislukuja. Ratkaistu viimeistellään kuten yllä.

3. Tutki, millä n:n positiivisilla kokonaislukuarvoilla pätee epäyhtälö

$$n! > \sqrt{n^n}.$$

Vastaus. Epäyhtälö $n! > \sqrt{n^n}$ pätee täsmälleen silloin, kun $n > 2$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on neliöidä epäyhtälö ja kirjoittaa tulon $(n!)^2$ tulontekijät kätevämpään järjestykseen.

Kun $n = 1$, $n! = 1 = \sqrt{1^1} = \sqrt{n^n}$ ja kun $n = 2$, $n! = 2 = \sqrt{2^2} = \sqrt{n^n}$. Tutkitaan sitten tapausta $n \geq 3$. Nyt

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) \cdot (1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n) \\ &= (1 \cdot n)(2 \cdots (n-1)) \cdots ((n-1) \cdot 2) \cdot (n \cdot 1). \qquad (1)\end{aligned}$$

Minkä tahansa muodostuneen parin lukujen tulo on vähintään n. Jos lukuparin toinen luku on 1, niin toinen luku on n, ja tulo on n. Muuten parin pienempi luku on vähintään 2 ja suurempi vähintään $n/2$, joten tulo on taas vähintään n.

Lisäksi huomataan, että oikeastaan jos kumpikaan parin luvuista ei ole 1, niin tulo on aidosti suurempi kuin n. Täten tulossa (1) kaikki n tekijää ovat vähintään n ja tekijöistä $n - 2 \geq 1$ kappaletta ovat suurempia kuin n. Tulo on siis suurempi kuin n^n, eli $n! > \sqrt{n^n}$ kun $n > 2$.

4. Tasossa on seitsemän pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samma suoralla. Kaikki pisteet yhdistetään toisiinsa janoilla. Jokainen näistä janoista on joko sininen tai punainen. Todista, että näin syntynneessä kuviossa on aina vähintään neljä kolmiota, joiden kaikki sivut ovat samanväriset.

Ratkaisu. Oletusten mukaan jokaiset kolme annetuista seitsemästä pisteestä ovat kolmion kärkipisteitä. Kolmioita on siis yhtä monta kuin on tapoja valita seitsemästä pisteestä 3, eli $\binom{7}{3} = 35$ kappaletta. Jos kolmion sivut eivät ole samanväriset, kutsumme kolmiota *kirjavaksi*. Kirjavan kolmion kärjistä on tasan kaksi sellaisia, joista lähtevät sivut ovat eriväriset. Kutsumme tällaista kärkeä samoin kirjavaksi. Koska jokaisesta kärjestä lähtee kuusi janaa, kärki voi olla kirjava $s(6-s)$:ssä kolmiossa, missä s on kärjestä lähtevien sinisten sivujen määrä. Selvästi lausekkeen $s(6-s)$ suurin arvo on 9. Täten kaikkien kirjavien kolmioiden kirjavien kärkien määrä on enitnään $7 \cdot 9 = 63$ ja kirjavien kolmioiden määrä on siis enintään $63/2 = 31{,}5$ eli enintään 31. Yksivärisiä kolmioita on ainakin $35 - 31 = 4$ kappaletta.

Kommentti. On myös mahdollista konstruoida esimerkki, jossa yksivärisiä kolmioita on tasan neljä.

Kommentti. On luonnollinen idea tutkia eri tapauksia esimerkiksi sen mukaan, kuinka monta tietyn väristä kaarta joistakin solmuista lähtee. Tällainen lähestymistapa ei kuitenkaan johda maaliin (ainakaan kovin helposti). Ratkaisun idea on hyvin erilainen: se arvioi kirjavien ja yksiväristen kolmioiden määriä. Ratkaisun ideaa voisi kutsua *globaaliksi*, kun taas tapauskäsittelyyn perustuva idea on *lokaali*.

5. Irja ja Valtteri heittävät vuorotellen kolikkoa ja Irja aloittaa. Kummallakin on pelinappula, ja alussa nappulat sijaitsevat pelilautana käytettävän neliön vastakkaisissa kärjissä. Jos heittovuorossa oleva pelaaja saa kruunan, hän siirtää nappulansa neliön vastakkaiseen kärkeen, mutta muuten viereiseenä kärkeen niin, että Irja siirtää nappulansa vastapäivään ja Valtteri myötäpäivään. Pelin voittaa se, joka saa siirrettyä nappulansa siihen kärkeen, jossa vastustajan nappula on. Kuinka suuri on todennäköisyys, että Irja voittaa pelin?

Ratkaisu. Ratkaisun idea on tutkia kaikki mahdollisia tilanteita, joita pelissä voi esiintyä, ja ratkoa tilanteiden voittotodennäköisyydet. Tämä onnistuu pystyttämällä yhtälöryhmä voittotodennäköisyyksien välille. Idean toteutusta varten ensiksi osoitetaan, että peli päättyy 100% todennäköisyydellä jommankumman pelaajan voittoon.

Osoitetaan ensiksi, että peli päättyy 100% todennäköisyydellä. Jos heittovuorossa olevan pelaajan vastustajan pelinappula on heittäjän kiertosuuntaan katsoen yhden tai kahden askeleen päässä heittäjän nappulasta, peli päättyy todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ vuorossa olevan heittoon, jos taas vastustajan nappula on kolmen askeleen pässä, peli ei pääty vuorossa olevan heittoon, mutta seuraavalla vastustajan vuorolla pelin päättymisen todennäköisyys on taas $\frac{1}{2}$. Todennäköisyys, että peli ei ole päättynyt kahden peräkkäisen vuoron aikana on siis enintään $\frac{1}{2}$, ja todennäköisyys, että peli ei olisi päättynyt $2n$:n vuoron aikana on enintään $\frac{1}{2^n}$. Todennäköisyys tälle lähestyy nollaa kun $n \to \infty$.

Olkoon nyt p_j, $j = 1, 2, 3$, todennäköisyys, että heittovuorossa oleva pelaaja voittaa pelin, kun vastustajan nappula on heittäjän kiertosuunnan mukaisesti j:n askeleen päässä heittäjän nappulasta. Idea on, että todennäköisyydet p_1, p_2 ja p_3 voidaan esittää toistensa avulla.

Ensinnäkin

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - p_3).$$

Heittäjä nimittäin voittaa pelin, jos hän saa klaavan, ja jos hän saa kruunan, hänen nappulansa menee asemaa, joka on kolmen askeleen päässä vastustajan nappulasta tämän kiertosuunnasta katsottuna. Tällöin vastustaja voittaa todennäköisyydellä p_3, eli tällä hetkellä vuorossa oleva voittaa todennäköisyydellä $1 - p_3$.

Toisekseen

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - p_1).$$

Jos nimittäin nappuloiden etäisyys on 2 askelta, heittäjä voittaa saadessaan kruunan, mutta klaava vie hänen nappulansa asemaan, joka on yhden askeleen päässä vastustajan nappulasta tämän kiertosuunnassa. Jälkimmäisessä tapauksessa vastustaja voittaa todennäköisyydellä p_1.

Ja vielä samaan tapaan päättelemällä saadaan

$$p_3 = \frac{1}{2}(1 - p_1) + \frac{1}{2}(1 - p_2).$$

Jos nimittäin nappuloiden etäisyys on 3 askelta, heiton tuloksesta riippuen seuraavalla vuorolla vastustajasta nähden etäisyydet ovat 1 tai 2 askelta.

Edellä johdettujen kolmen yhtälön muodostaman ryhmän ratkaisu on

$$p_1 = \frac{6}{7}, p_2 = \frac{4}{7}, p_3 = \frac{2}{7}.$$

Koska pelin alussa aloittaja Irjan nappula oli kahden askeleen päässä Valtterin nappulasta, vastaus on $p_2 = \frac{4}{7}$.

Kommentti. Samanlainen idea yleistyy muihinkin peleihin, joissa on äärellinen määrä mahdollisia tilanteita ja joissa esiintyy satunnaisuutta. Tällöin tietysti yhtälöryhmässä olevien muuttujien määrä voi olla suurempi.