Lukion matematiikkakilpailu 2.2.2001

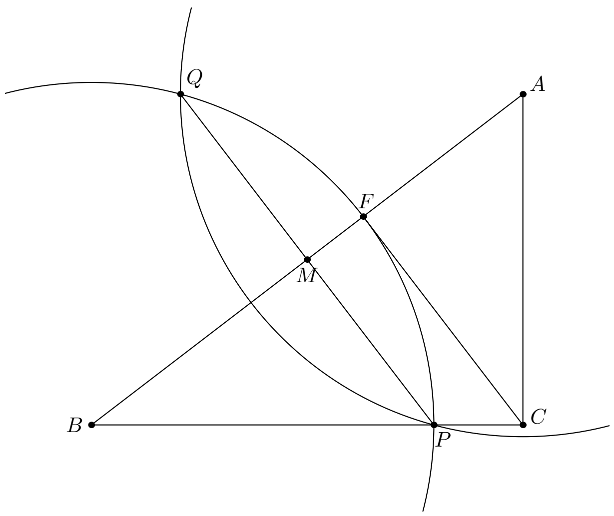
Ratkaisuehdotuksia

1. *Suorakulmaisessa kolmiossa ABC hypotenuusaa AB vastaan piirretty korkeusjana on CF. F:n kautta kulkeva B-keskinen ympyrä ja samansäteinen A-keskinen ympyrä leikkaavat toisensa sivun CB pisteessä. Määritä suhde $FB : BC$.*

Vastaus. Suhde $FB : BC$ on $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ratkaisu. Ratkaisun ideana on hyödyntää kuviosta löytyviä yhdenmuotoisia (suorakulmaisia) kolmioita pituuksien laskemiseksi.

Olkoon tehtävän A- ja B-keskisten ympyröiden BC:llä sijaitseva leikkauspiste P ja olkoon Q ympyröiden toinen leikkauspiste. Silloin QP leikkaa ympyröiden keskipisteiden välisen janan AB tämän keskipisteessä M ja $QP \perp AB$.



Jos $BP = BF = r$, $BC = a$ ja $AB = c$, niin yhdenmuotoisista kolmioista BPM ja BCF saadaan

$$\frac{BM}{BP} = \frac{BF}{BC}$$

eli

$$r^2 = \frac{ac}{2}.$$

Toisaalta yhdenmuotoisista kolmioista BCF ja BAC saadaan

$$\frac{BF}{BC} = \frac{a}{c} \tag{1}$$

eli

$$r = \frac{a^2}{c}.$$

Siis $ac/2 = a^4/c^2$, josta ratkaistaan

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

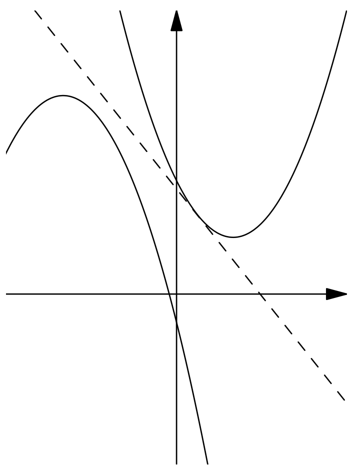
Täten yhtälön (1) nojalla

$$\frac{FB}{BC} = \frac{a}{c},$$

mistä väite seuraa.

2. *Toisiaan leikkaamattomien käyrien yhtät ovat* $y = ax^2+bx+c$ *ja* $y = dx^2+ex+f$*, missä* $ad < 0$*. Todista, että on olemassa tason suora, joka ei leikkaa kumpaakaan näistä käyristä.*

Ratkaisu. Ratkaisun idea on valita ensimmäiseltä paraabelilta tangentti niin, ettei se leikkaa toista tangenttia.



Väite on uskottava, jos ajattelee kahta vastakkaisiin suuntiin aukeavaa toisiaan leikkaamatonta paraabelia ja toisen paraabelin tangentteja. Tällaista tangenttia voi kiertää pitkin paraabelia sellaiseen asentoon, että se ei leikkaa toista paraabelia. Tällaisen tangentin suuntaiset, sen lähellä olevat suorat eivät silloin leikkaa kumpaakaan paraabelia.

Todistetaan väite täsmällisesti laskemalla. Koska paraabelit eivät leikkaa, yhtälöllä $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$ ei ole ratkaisuja. Yhtälön

$$(a-d)x^2 + (b-e)x + c - f = 0$$

diskriminantti

$$(b-e)^2 - 4(a-d)(c-f) \tag{2}$$

on siis negatiivinen. Paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ pisteeseen (h, k) piirretyn tangentin yhtälö on (ks. kommentti alla) $y - k = (2ah + b)(x - h)$ eli

$$y = ah^2 + bh + c + (2ah + b)(x - h) = (2ah + b)x - ah^2 + c.$$

Selvitetään, voiko h:n valita niin, että tangentti ei leikkaa paraabelia $y = dx^2+ex+f$. Jotta tangentti ja paraabeli eivät leikkaisi, yhtälöllä

$$(2ah + b)x - ah^2 + c = dx^2 + ex + f$$

eli

$$dx^2 + (e - 2ah - b)x + f + ah^2 - c = 0$$

ei saa olla ratkaisua. On siis voitava valita sellainen h, että tämän toisen asteen yhtälön diskriminantti on negatiivinen:

$$(e - 2ah - b)^2 - 4d(f + ah^2 - c) < 0.$$

Tämän epäyhtälön vasen puoli on h:n toisen asteen polynomi, joka on auki kerrottuna

$$(4a^2 - 4ad)h^2 - 4a(e - b)h + (e - b)^2 - 4d(f - c).$$

Lasketaan vielä tämän polynomin diskriminantti. Se on

$$\begin{aligned} &16a^2(e - b)^2 - 16(a^2 - ad)((e - b)^2 - 4d(f - c)) \\ =&16ad(e - b)^2 + 64(a^2 - ad)d(f - c) \\ =&16ad((e - b)^2 - 4(a - d)(c - f)). \end{aligned}$$

Todetaan että $ad < 0$ ja, niin kuin yhtälössä (2) todettiin, $(e-b)^2-4(a-d)(c-f) < 0$. Diskriminantti on siis positiivinen. Yhtälöllä $(4a^2 - 4ad)h^2 - 4a(e - b)h + (e - b)^2 - 4d(f - c) = 0$ on siis kaksi juurta h_1 ja h_2, ja kun $h_1 < h < h_2$, niin paraabelin $y = ax^2+bx+c$ tangentti $y = (2ah+b)x-ah^2+c$ ei leikkaa paraabelia $y = dx^2+ex+f$. Riittävän lähellä tätä tangenttia olevat sen suuntaiset suorat eivät täten leikkaa kumpaakaan tehtävän kahdesta paraabelista.

Kommentti. Ratkaisussa käytettiin tietoa siitä, että paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ pisteeseen $(h, ah^2 + bh + c)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $2ah + b$. Tämän voi perustella käyttämällä differentiaalilaskennan työkaluja. Toinen tapa on tutkia, millä kulmakertoimen t arvolla pisteen $(h, ah^2 + bh + c)$ kautta kulkeva suora ei leikkaa paraabelia missään muussa pisteessä. (Tehtävä on tosin erittäin vaativa, jos paraabelin tangentit eivät ole etukäteen tuttuja, ja joka tapauksessa tehtävä on vaikeammasta päästä.)

3. *Luvut a, b ja c ovat positiivisia kokonaislukuja ja $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. Osoita, että*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}.$$

Ratkaisu. Ratkaisun ideana on jakautua tapauksiin lukujen a, b ja c kokojen mukaan ja tehdä arvioita.

Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $a \leq b \leq c$. Selvästi $a \geq 2$.

Tapaus $a = 2$: Tällöin $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{2}$, joten $b \geq 3$. Jos $b = 3$, niin $\frac{1}{c} < \frac{1}{6}$, joten $c \geq 7$. Silloin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}.$$

Jos $b \geq 4$, niin $\frac{1}{c} < \frac{1}{4}$, joten $c \geq 5$. Tässä tapauksessa

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}.$$

Tapaus $a = 3$: Jos myös $b = 3$, on oltava $\frac{1}{c} < \frac{1}{3}$ eli $c \geq 4$. Silloin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} < \frac{41}{42}.$$

Jos $b \geq 4$, on

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} < \frac{41}{42}.$$

Tapaus $a \geq 4$: tällöin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{4} < \frac{41}{42}.$$

4. *Jokaviikkoisessa jokeriarvonnassa arvotaan seitsemän numeron jono. Jokainen numero voi olla mikä tahansa luvuista* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. *Kuinka suuri on todennäköisyys, että jokeriarvonnan jonossa esiintyy korkeintaan viittä numeroa?*

Ratkaisu. Ratkaisun ideana on laskea ensin todennäköisyys, että jonossa on tasan kuusi tai setsemän eri numeroa.

Erilaisia jokeririvejä on 10^7 kappaletta. Lasketaan kuinka monessa on seitsemän tai kuusi eri numeroa. Rivejä, joissa on seitsemän eri numeroa, on $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ kappaletta. (Ensimmäiselle numerolle on kymmenen vaihtoehtoa; kun ensimmäinen numero kiinnitetty, toiselle on yhdeksän vaihtoehtoa jne.).

Jos rivissä on kuusi eri numeroa, siinä esiintyy jokin numero kahdesti. Tämän numeron esiintymispaikoille on $\binom{7}{2} = 21$ eri vaihtoehtoa. Rivejä, joissa yksi numero esiintyy kahdesti ja muut kerran, on siten $21 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ kappaletta. (Kahdesti esiintyvä numero voidaan valita kymmenestä vaihtoehdosta, lopuista viidestä paikasta ensimmäinen voidaan täyttää jollakin yhdeksästä eri numerosta jne.).

Jokeririvejä, joissa on ainakin kuusi numeroa on siis yhteensä $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 + 21)$ kappaletta, ja todennäköisyys, että arvottu rivi olisi tällainen, on

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 + 21)}{10^7} = \frac{9 \cdot 6 \cdot 7}{1000} = \frac{189}{500}.$$

Tehtävässä kysytty todennäköisyys on siis

$$1 - \frac{189}{500} = \frac{311}{500} = 0{,}622.$$

5. *Määritä sellaiset* $n \in \mathbb{N}$, *että* $n^2 + 2$ *on luvun* $2 + 2001n$ *tekijä.*

Vastaus. Ratkaisut ovat $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$ ja $n = 2001$

Ratkaisu. Ratkaisun idea on kirjoittaa jaollisuusehto kätevämpään muotoon, johtaa jaollisuusehdosta ylärajoja n:lle ja käydä jäljelle jäävät tapaukset käsin läpi.

Ehdosta seuraa $n^2 + 2 \leq 2 + 2001n$ eli $n \leq 2001$. Lisäksi $n = 2001$ on ratkaisu, kuten on myös $n = 0$. Oletetaan, nyt, että $1 \leq n \leq 2000$.

Kirjoitetaan annettu ehto $n^2 + 2 \mid 2 + 2001n$ muotoon

$$n^2 + 2 \mid -n^2 + 2001n = n(2001 - n).$$

Huomataan, että syt$(n^2+2, n) \leq 2$, joten

$$n^2+2 \mid 2(2001-n).$$

Tästä seuraa jo, että $n \leq \sqrt{4000}$. Koska $64^2 = 4096 > 4000$, tarkoittaa tämä että $n \leq 63$. Ratkaisukandidaatteja on siis 63 kappaletta: $n = 1, 2, 3, \ldots, 63$.

Kandidaattien määrää voi tiputtaa esimerkiksi seuraavilla havainnoilla:

(i) n:n on pakko olla jaollinen kolmella. Muuten $n = 3k \pm 1$ ja $n^2+2 = 9k^2 \pm 6k + 3$ on jaollinen kolmella, kun taas $2(2001-n)$ ei ole jaollinen kolmella. (Kandidaatteja jäljellä: 21.)

(ii) Koska n on jaollinen kolmella, n^2+2 ei ole jaollinen kolmella ja $2001-n$ on. Täten

$$n^2+2 \mid 2\frac{2001-n}{3}.$$

Tämä parantaa ylärajan arvoon $n \leq \sqrt{4000/3} < 37$ eli $n \leq 36$. (Kandidaatteja jäljellä: 12.)

(iii) Voidaan laskea, että toisen asteen yhtälön $n^2+2 = 2(2001-n)/3$ ratkaisut eivät ole kokonaislukuja. Täten n^2+2 on luvun $2(2001-n)/3$ tekijä, joka on pienempi kuin luku itse, joten se on enintään puolet tästä luvusta:

$$n^2+2 \leq \frac{2001-n}{3}.$$

Tämä parantaa ylärajan arvoon $n \leq \sqrt{2000/3} < 25$ eli $n \leq 24$. (Kandidaatteja jäljellä: 8.)

(iv) Jos n on pariton, niin n^2+2 on pariton ja täten

$$n^2+2 \mid \frac{2001-n}{3}.$$

Kuten kohdassa (ii), voidaan tarkistaa, ettei yhtälön $n^2+2 = (2001-n)/3$ ratkaisut ole kokonaislukuja. Siis n^2+2 on luvun $(2001-n)/3$ tekijä, joka on pienempi kuin $(2001-n)/3$. Koska $(2001-n)/3$ on pariton, on n^2+2 enintään kolmasosa tästä luvusta:

$$n^2+2 \leq \frac{2001-n}{9}.$$

Tämä parantaa ylärajan arvioon $n \leq \sqrt{2000/9} < 15$ eli $n \leq 14$, kun n on pariton. (Kandidaatteja jäljellä: 6.)

Nyt parillisia kandidaatteja on enää $n = 6, 12, 18, 24$ ja parittomia kandidaatteja on $n = 3$ ja $n = 9$. Nämä kuusi ehdokasta pystyy käymään mielekkäästi läpi. Lopputulos on, että vain $n = 3$ ja $n = 6$ kelpaavat.