Lukion matematiikkakilpailu 8.2.2002

Ratkaisuehdotelma

1. Funktiolle f on voimassa $f(\cos x) = \cos(17x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Osoita, että $f(\sin x) = \sin(17x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on kirjoittaa $\sin x$ kosinin avulla (kaavan $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ avulla).

Kaikilla reaaliluvuilla x pätee

$$\begin{aligned} f(\sin x) &= f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \cos\left(17\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \cos\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - 17x\right) \\ &= \cos(\pi/2 - 17x) \\ &= \sin(17x). \end{aligned}$$

2. Osoita: jos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

niin myös

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n},$$

kun n on pariton positiivinen kokonaisluku.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on, että annetusta ehdosta seuraa $a = -b$ (tai jokin symmetrisistä varianteista). Haluttu yhtälö seuraa tästä suoraan.

Yhtälö

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

on yhtäpitävä yhtälön

$$(bc + ca + ab)(a + b + c) = abc$$

ja edelleen yhtälöiden

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc = 0$$

ja

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0$$

kanssa. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $a = -b$. Nyt jos n on pariton positiivinen kokonaisluku, niin

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n},$$

mistä väite seuraa.

Kommentti. Muotoa $a = -b$ olevan ehdon voi johtaa muillakin tavoilla, esimerkiksi kirjoittamalla $1/a+1/b = (a+b)/ab$ ja $1/(a+b+c)-1/c = -(a+b)/(c(a+b+c))$. Nyt $a+b = 0$ tai sieventämällä $ab = -c(a+b+c)$, minkä saa kirjoitettua tulomuotoon $(c+a)(c+b) = 0$.

3. n tytöstä ja n pojasta muodostetaan arpomalla n paria. Kuinka suuri on todennäköisyys saada ainakin yksi tyttöpari? Millä luvun n arvoilla tämä todennäköisyys on yli 90%?

Vastaus. Todennäköisyys saada ainakin yksi tyttöpari on

$$1 - \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Tämä todennäköisyys on yli 90% täsmälleen silloin, kun $n \geq 6$.

Ratkaisu. Ratkaisun idea on laskea ensiksi todennäköisyys sille, että ei ole yhtään tyttöparia.

Jos tyttöpareja ei ole ollenkaan, niin silloin kaikki parit ovat tyttö-poika-pareja. Tutkitaan tämän tapahtuman todennäköisyyttä. Numeroidaan parit. Todennäköisyys, että ensimmäinen pari olisi tyttö-poika-pari on

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}}.$$

Toinen pari on tätä tyyppiä todennäköisyydellä

$$\frac{(n-1)^2}{\binom{2n-2}{2}}.$$

Ja niin edelleen. Todennäköisyys, että kaikki parit olisivat tyttö-poika-pareja on siis

$$\frac{n^2 \cdot (n-1)^2 \cdots 1^2}{\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2!}(2n-4)! \cdots \frac{2!}{2!0!}} = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$1 - \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Tutkitaan vielä, milloin tämä on suurempi kuin 90%. Toisin sanoen kysymys on, milloin

$$\frac{2^n}{\binom{2n}{n}} < 10\%$$

eli

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^n} > 10.$$

Arvoilla $n = 1, 2, 3, 4$ ja 5 lausekkeen arvot ovat

$$\frac{2}{2} = 1,\ \frac{6}{4} < 2,\ \frac{20}{8} < 3,\ \frac{70}{16} < 5 \text{ ja } \frac{252}{32} < 8.$$

Arvolla $n = 6$ lauseke on

$$\frac{\binom{12}{6}}{2^6} = \frac{924}{64} > 10.$$

Osoitetaan vielä, että lausekkeen arvo on yli 10 myös silloin, kun $n > 6$. Tehdään tämä induktiolla. Yhtä suuremmalla n:n arvolla lausekkeen arvo on

$$\begin{aligned}\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}}{2\cdot 2^n}\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)^2}\cdot\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.\end{aligned}$$

Tulon ensimmäinen termi on vähintään yksi, koska $(2n+2)(2n+1) = 4n^2+6n+2 \geq 2n^4 + 4n + 2$. Väite seuraa induktion perusteella tästä.

4. Kuperalla (konveksilla) kuviolla $\mathcal{K}$ on seuraava ominaisuus: kun sitä katsotaan mistä hyvänsä tietyn ympyrän $\mathcal{Y}$ pisteestä, se näkyy suorassa kulmassa. Osoita, että kuvio on symmetrinen $\mathcal{Y}$:n keskipisteen suhteen. [Kuvio on *kupera*, jos jokaisen kahden siihen kuuluvan pisteen välinen jana kuuluu kuvioon. Kuperan kuvion jokaisen reunapisteen kautta voidaan piirtää yksi tai useampi suora niin, että kuvion sisäosa on kokonaan suoran rajoittamassa puolitasossa.]

Ratkaisu.

Huomautus: jos $\mathcal{K}$ on konveksi ja P on kuvion $\mathcal{K}$ ulkopuolinen piste, niin on mahdollista piirtää kaksi pisteen P kautta kulkevaa tangenttia kuviolle $\mathcal{K}$. Tangentti on suora, jolla $\mathcal{K}$ on kokonaan suoran toisella puolella tai suoralla ja jolla on olemassa $\mathcal{K}$:n pisteitä jotka ovat mielivaltaisen lähellä suoraa (tai suoralla). Kuvio näkyy suorassa kulmassa pisteestä P, jos nämä kaksi tangenttia ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Itse ratkaisuun. Olkoon P jokin $\mathcal{K}$:n reunapiste ja O ympyrän $\mathcal{Y}$ keskipiste. Leikatkoon OP kuvion $\mathcal{K}$ reunan myös pisteessä Q. Tavoitteena on osoittaa $OP = OQ$. Tehdään vastaoletus, ja oletetaan symmetriaan nojautuen $OQ < OP$.

Piirretään Q:n kautta kuvion $\mathcal{K}$ tangentti, joka leikkaa $\mathcal{Y}$:n pisteissä A ja B. A:n ja B:n kautta piirretyt AB:tä vastaan kohtisuorat suorat, jotka leikkaavat $\mathcal{Y}$:n pisteissä D ja C, koskettavat tehtävän ehdon nojalla $\mathcal{K}$:ta. Mutta näin tekee myös CD. Suorakaide $ABCD$ on siis $\mathcal{K}$:n ympäri piirretty nelikulmio. Koska O on $ABCD$:n keskipiste, jana CD on samalla etäisyydellä O:sta kuin AB. Tästä seuraa, että P on suorakaiteen ulkopuolella. Oletus $OQ < OP$ johtaa siis ristiriitaan, ja olemme valmiit.

Kommentti. Tehtävä on varsin epätyypillinen kansallisen tason kilpailutehtäväksi, joissa geometria yleensä käsittelee suoria, monikulmioita ja ympyröitä. Konvekseja kuvioita koskevat tiedot eivät täten välttämättä ole monille tehtävää ratkoville tuttuja, jolloin tehtävä on tietysti hyvin haastava.

5. Tasossa on säännöllinen 17-kulmio $\mathcal{P}$ ja sen ympäri piirretty ympyrä $\mathcal{Y}$. 17-kulmion $\mathcal{P}$ kärjet $A, B \in \mathcal{P}$ ovat erivärisiä, jos niiden rajoittamalla lyhyemmällä ympyrän $\mathcal{Y}$ kaarella on päätepisteet mukaan lukien $2^k + 1$ monikulmion $\mathcal{P}$ kärkeä jollakin $k \in \mathbb{N}$. Mikä on pienin määrä värejä, joilla 17-kulmion $\mathcal{P}$ kärjet voi värittää?

Vastaus. Pienin määrä värejä, joilla väritys onnistuu, on 6.

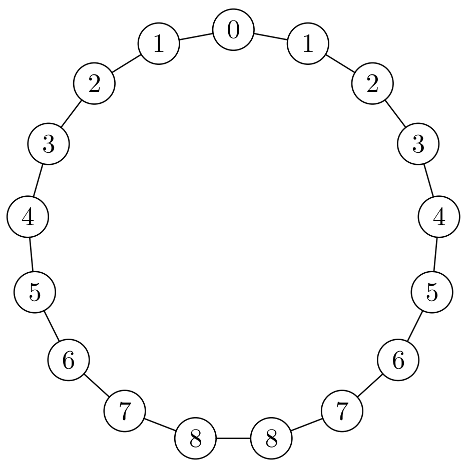
Ratkaisu. Ratkaisun ydin on seuraava aputulos.

Aputulos. Ei voi olla mitään neljää kärkeä, jotka ovat kaikki saman värisiä.

Aputuloksen seurauksena kullakin värillä voi värittää enintään kolme kärkeä, mistä seuraa, että värejä tarvitaan ainakin kuusi. Ratkaisun lopussa on esitetty väritys kuudella värillä.

Aputuloksen voi periaatteessa perustella käymällä kaikki mahdolliset tapaukset järjestelmällisesti läpi. Alla esitetty todistus on elegantimpi ja ei vaadi tapauskäsittelyä.

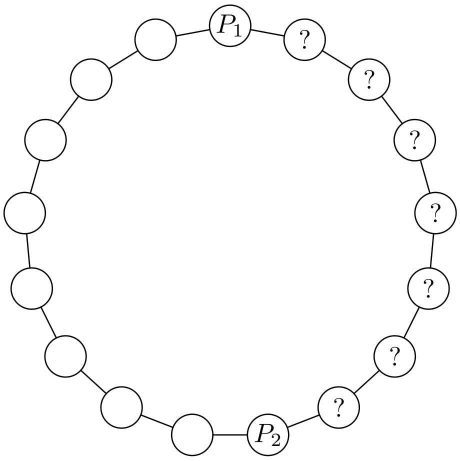
Väitteen todistus. Määritellään kahden kärjen P ja Q etäisyydeksi $d(P, Q)$ lyhyemmän kaaren $\widehat{PQ}$ kärkien lukumäärä (päätepisteet mukaan lukien) miinus yksi. Tätä on havainnollistettu kuvaan.



Etäisyydet ylimpään kärkeen merkittynä kuvioon.

Tehdään vastaoletus: jotkin neljä eri kärkipisteä ovat kaikki saman värisiä. Olkoot nämä kärkipisteet vastapäivään luettuna P_1, P_2, P_3 ja P_4. Määritellään $a_1 = d(P_1, P_2)$, $a_2 = d(P_2, P_3)$, $a_3 = d(P_3, P_4)$ ja $a_4 = d(P_4, P_1)$. Ehdon nojalla mikään luvuista a_i ei ole $1, 2, 4$ tai 8, joten $a_i \in \{3, 5, 6, 7\}$. Erityisesti $a_i \geq 3$.

Lisäksi huomataan, että $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 17$. Nimittäin mikä tahansa kaarista P_1P_2, P_2P_3 ja P_4P_1 vastapäivään luettuna ovat kaikki lyhyempiä kuin puolet 17-kulmion kaarista – jos esimerkiksi P_1P_2 olisi pidempi kuin puolet, eivät P_3 ja P_4 mahtuisi myötäpäivään kulkevalle kaarelle P_1P_2 niin, että a_2, a_3 ja a_4 olisivat vähintään 3. Tämän vuoksi etäisyyksien $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3), d(P_3, P_4), d(P_4, P_1)$ summa vastaa kierrosta 17-kulmion ympäri, eli $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 17$.



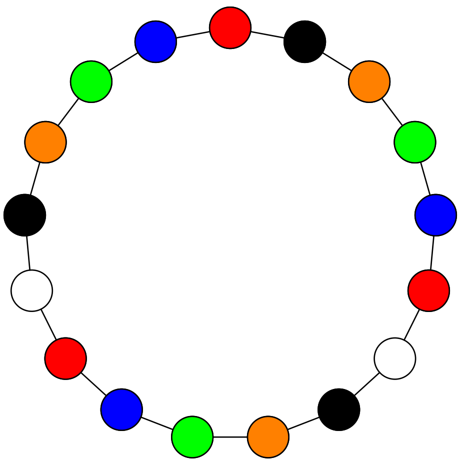
Kärkiä P_3 ja P_4 ei voi valita kysymysmerkellä merkityistä kärjistä niin, että etäisyydet a_i olisivat vähintään 3.

Tutkitaan sitten yhtälöä $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 17$ ja sen ratkaisuja, kun kaikki luvut kuuluvat joukkoon $\{3, 5, 6, 7\}$. Huomataan, että pienin luvuista a_i on 3 (muuten $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 20$). Loppujen kolmen luvun summa on 14, mistä nähdään, että myös toiseksi pienin luvuista on 3, ja että loput kaksi lukua ovat 5 ja 6.

Täten a_1, a_2, a_3 ja a_4 ovat jossakin järjestyksessä luvut $3, 3, 5, 6$. Tämä tarkoittaa, että jonossa a_1, a_2, a_3, a_4, a_1 on jossakin kohtaa peräkkäin luvut 5 ja 3 jomminkummin päin. Tämä vastaa sitä, että P_1 ja P_3 tai P_2 ja P_4 ovat $5 + 3 = 8$ päässä toisistaan, mikä johtaa ristiriitaan.

Aputulos on siis todistettu.

Ratkaisun viimeistele esimerkki värityksestä kuudella värillä. Jos kärjet ovat vastapäivään ylhäältä aloittaen $P_1, P_2, \ldots, P_{17}$, niin väritetään P_i, P_{i+6}, P_{i+12} samalla värillä kun $1 \leq i \leq 5$, ja lisäksi väritetään P_6 ja P_{12} väritetään samalla värillä (kuvassa valkoisella).



Väritys kuudella värillä.